Fizyka 1B

Wykład 7

dr Piotr Sitarek, prof. uczelni

Katedra Fizyki Doświadczalnej

Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej

Ruch obrotowy

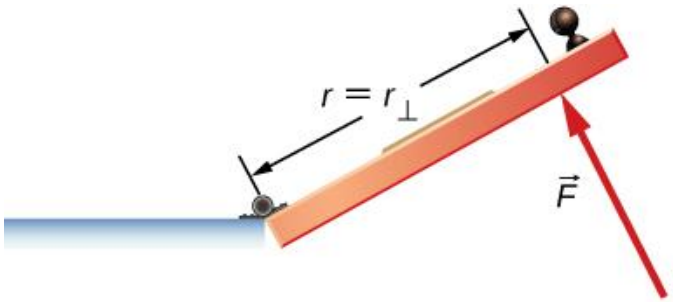
- Moment siły
- Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego
- Praca i energia kinetyczna w ruchu obrotowym
- Toczenie się ciał
- Moment pędu
- Zasada zachowania momentu pędu
- Precesja żyroskopu

Moment siły

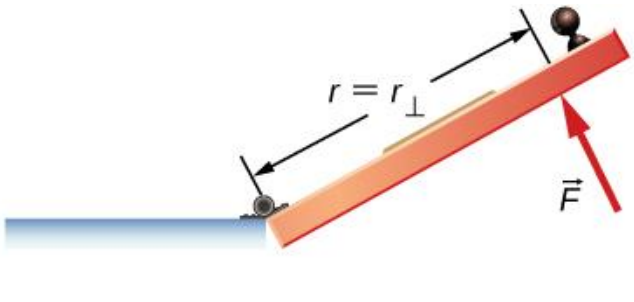
- zdefiniowaliśmy wiele zmiennych obrotowych będących odpowiednikami zmiennych w ruchu postępowym,
- w takim razie co jest odpowiednikiem siły?
- siły zmieniają ruch postępowy obiektów,
- w takim razie odpowiednikiem w ruchu obrotowym musi być wielkość wpływająca na ruch obrotowy obiektu wokół osi,
- wielkość tą nazywamy **momentem siły** (ang. torque).

Moment siły

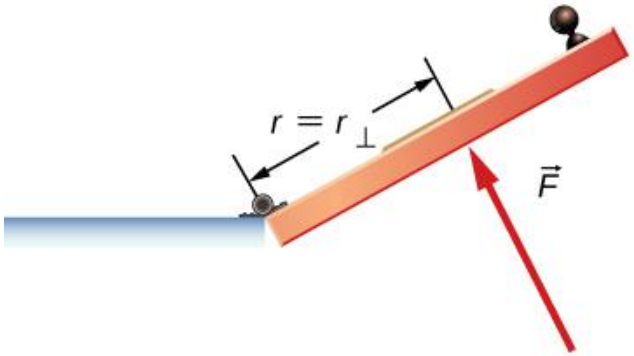
Przykład – otwieranie drzwi

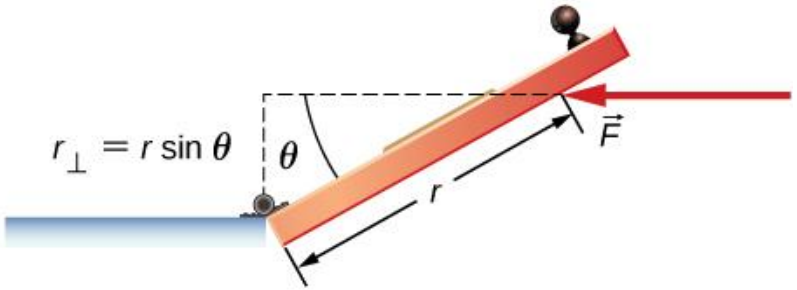


(a)



(b)

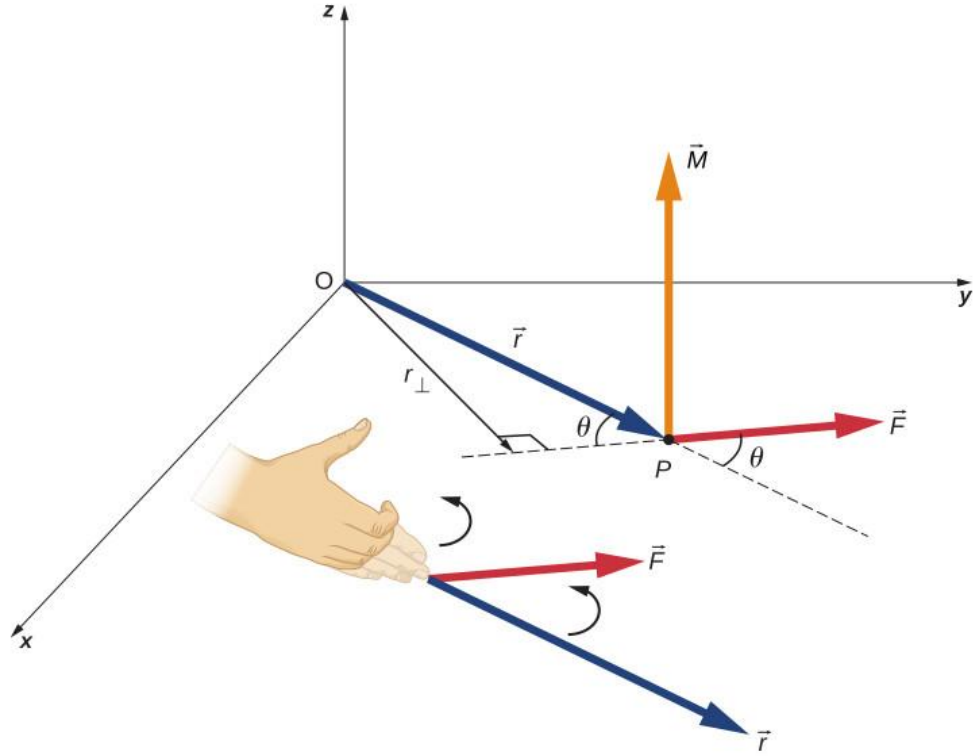




Moment siły

Definicja momentu siły

Momentem siły $\vec{F}$ względem punktu *O*, działającym w punkcie *P*, nazywamy wielkość wektorową $\vec{M}$ zdefiniowaną jako iloczyn wektorowy wektora położenia punktu *P* (wektor $\vec{r}$) względem punktu *O* i wektora siły $\vec{F}$.



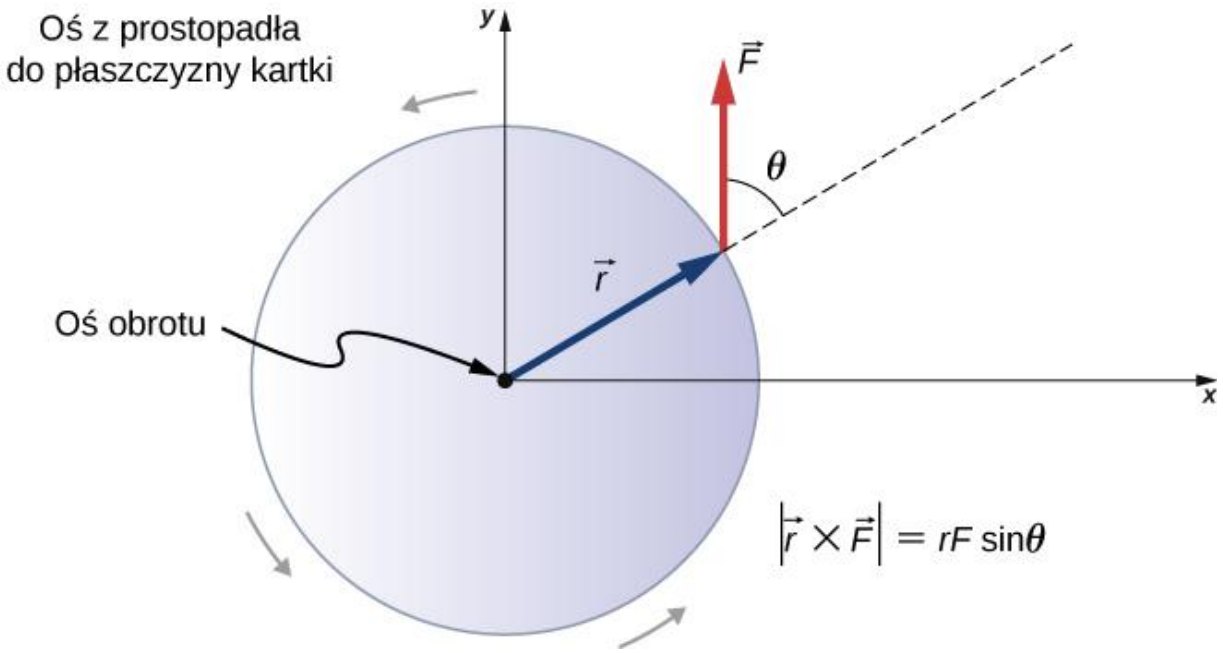
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = rF\sin\theta$$

$$\left|\vec{M}\right| = r_\perp F$$

Moment siły

- kąt między promieniem a siłą wpływa na wartość momentu siły,
- jeśli kąt jest równy zero, moment siły wynosi zero,
- jeśli kąt wynosi 90°, to moment siły jest maksymalny,
- moment siły poniżej jest dodatni i skierowany przed płaszczyznę rysunku, wzdłuż dodatniego zwrotu osi *z*,
- w wyniku działania tego momentu siły krążek obraca się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara



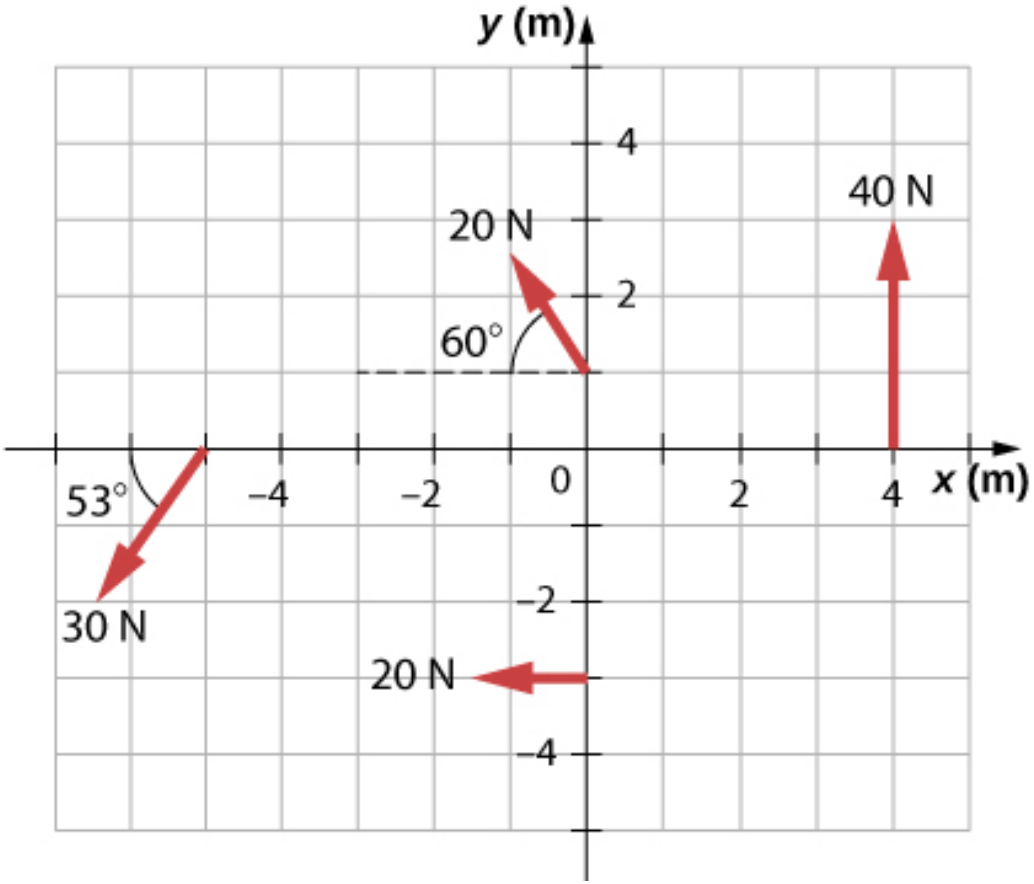
Moment siły

Jeżeli na ciało sztywne obracające się wokół danej osi działają różne siły i związane z nimi momenty sił, to wypadkowy moment sił będzie sumą wektorową poszczególnych momentów siły.

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i$$

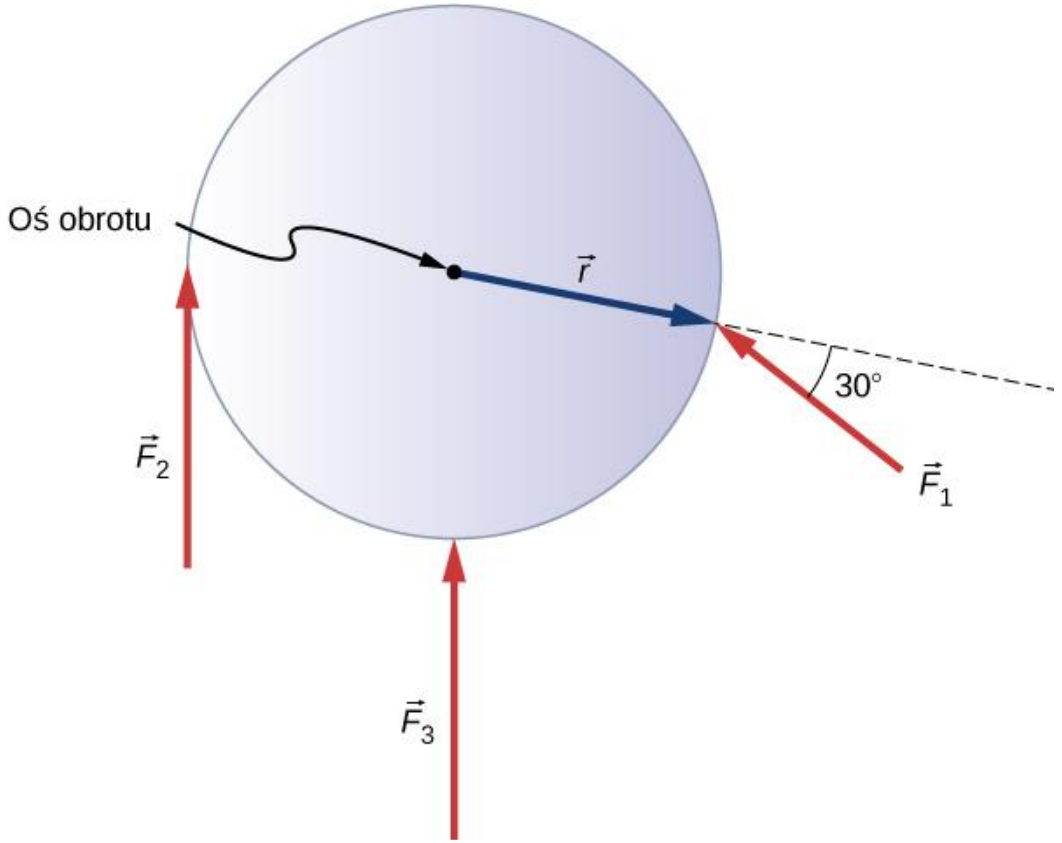
Moment siły

Przykład



Moment siły

Przykład

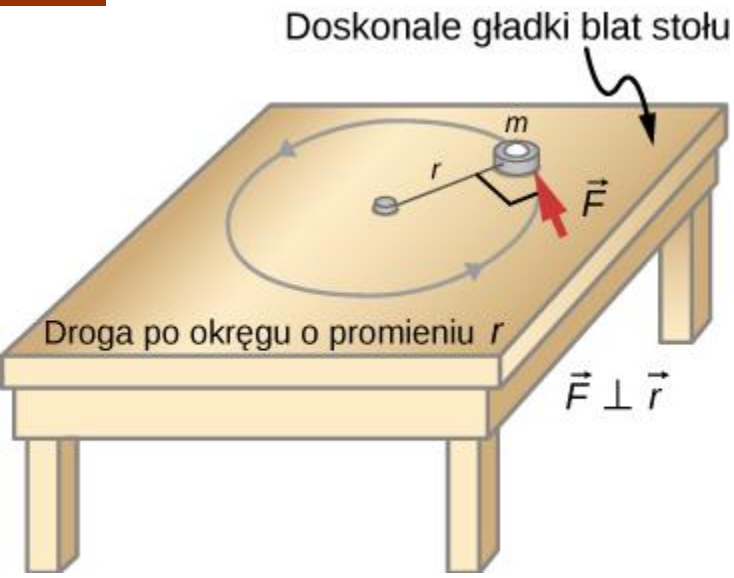


$\left|\vec{F}_1\right| = 20\ \text{N}, \left|\vec{F}_2\right| = 30\ \text{N}, \left|\vec{F}_3\right| = 30\ \text{N}$ oraz $r = 0{,}5\ \text{m}$

Moment siły

Równanie Newtona dla ruchu obrotowego

- czy dla ruchu obrotowego istnieje równanie analogiczne do drugiego prawa Newtona dla ruchu postępowego, które zawiera moment siły?



$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$M = I\varepsilon$$

Moment siły

Druga zasada dynamiki newtona dla ruchu obrotowego

Jeśli więcej niż jeden moment siły działa na ciało sztywne obracające się wokół stałej osi, wówczas suma momentów siły jest równa momentowi bezwładności pomnożonemu przez przyspieszenie kątowe:

$$\sum_i M_i = I\varepsilon$$

$$\sum \vec{M} = I\vec{\varepsilon}$$

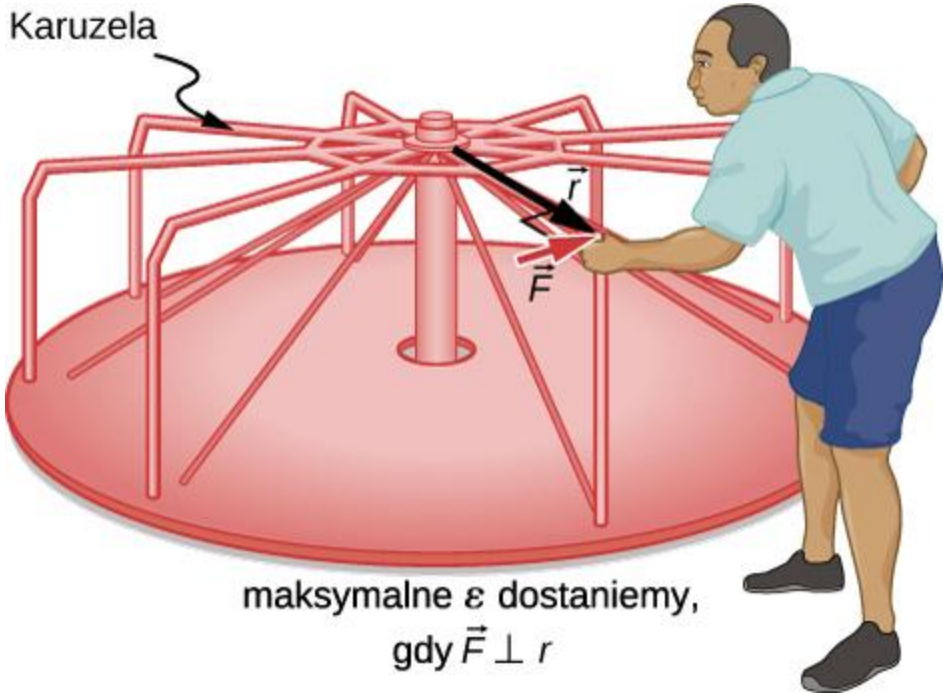
Moment siły

Przykład – karuzela

Ojciec kręci karuzelą na placu zabaw. Działa on z siłą 250 N na brzeg karuzeli o masie 200,0 kg. Promień karuzeli wynosi 1,50 m. Oblicz przyspieszenie kątowe karuzeli spowodowane przyłożeniem tej siły:

a. gdy nikogo nie ma na karuzeli;

b. gdy dziecko o masie 18 kg siedzi w odległości 1,25 m od środka



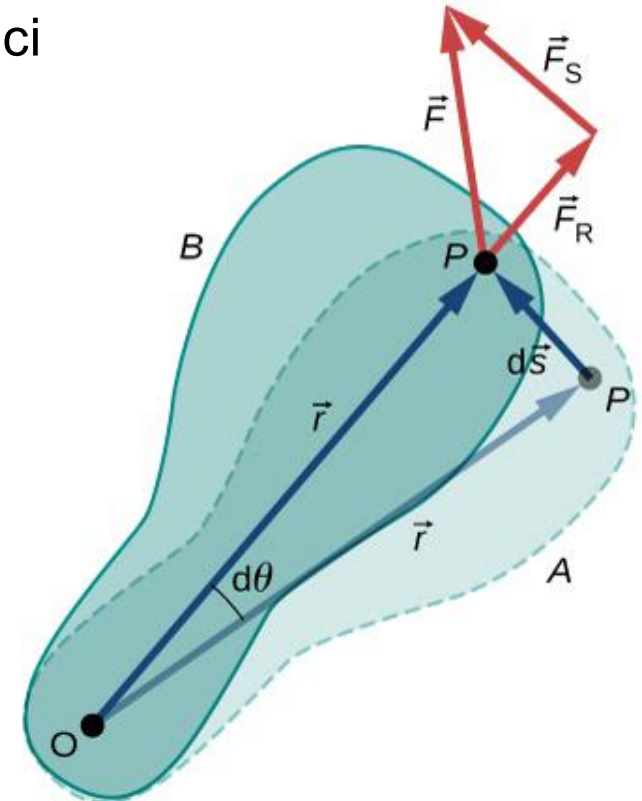
Praca i energia kinetyczna w ruchu obrotowym

Praca w ruchu obrotowym

Bryła sztywna została obrócona o kąt $d\theta$ od *A* do *B* w wyniku działania siły $\vec{F}$. Siła jest przyłożona w punkcie *P*, określonym przez wektor położenia $\vec{r}$. Przedstawiona bryła sztywna obraca się wokół stałej osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez punkt *O*.

Punkt *P* wykonując obrót o kąt $d\vec{\theta}$ przemieści się o wektor $d\vec{s}$.

$$d\vec{s} = d\vec{\theta} \times \vec{r}$$



Praca i energia kinetyczna w ruchu obrotowym

Stosując definicję pracy otrzymujemy:

$$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int \vec{F} \cdot (\mathrm{d}\vec{\theta} \times \vec{r}) = \int (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \mathrm{d}\vec{\theta}$$

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{a}\right)$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

$$W = \int \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{\theta}$$

$$\mathrm{d}W = M \cdot \mathrm{d}\theta$$

$$M = \sum_i M_i$$

Praca i energia kinetyczna w ruchu obrotowym

Twierdzenie o pracy i energii

Twierdzenie o pracy i energii w ruchu obrotowym wokół stałej osi ma postać:

$$W_{AB} = E_{\mathrm{kB}} - E_{\mathrm{kA}}$$

gdzie

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

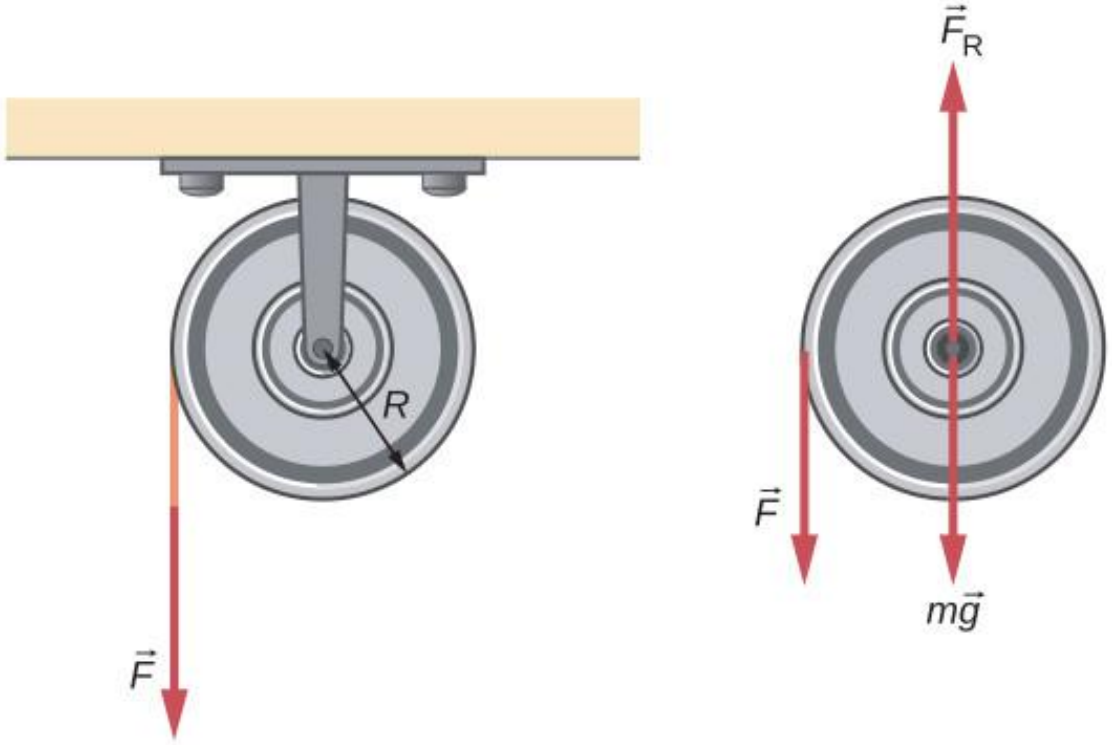
a praca wykonana przez wypadkową siłę nad bryłą sztywną obracającą się od punktu *A* do punktu *B* wyraża się zależnością:

$$W_{AB} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \vec{M}\, \mathrm{d}\vec{\theta}$$

Praca i energia kinetyczna w ruchu obrotowym

Przykład – krążek

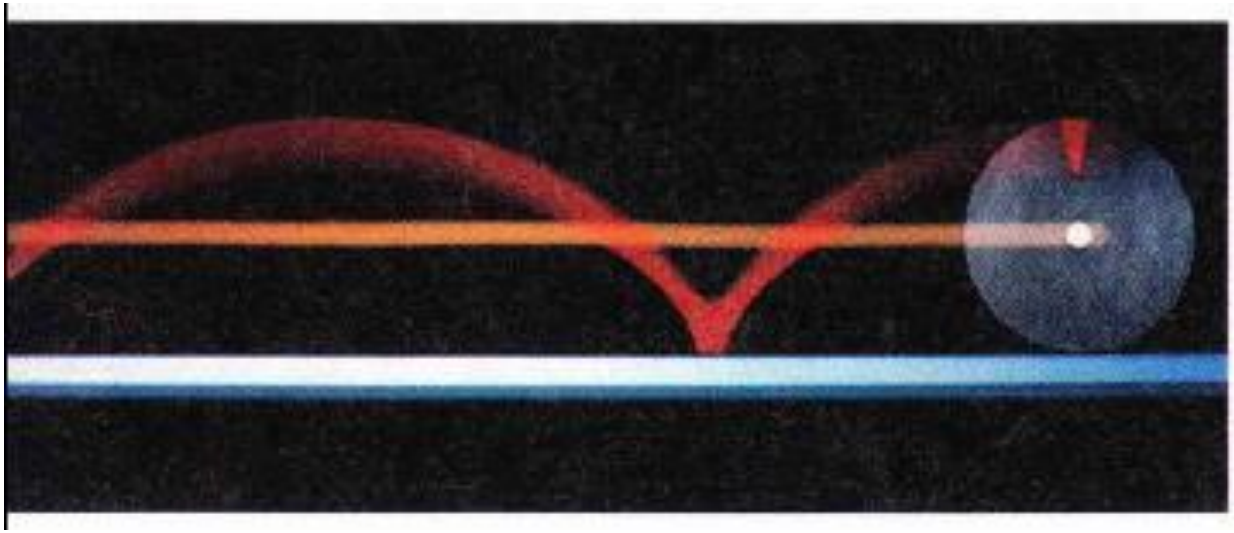
Nawinięty wokół krążka sznurek jest ciągnięty pionowo w dół z siłą o wartości 50 N. Promień krążka wynosi 0,1 m, a jego moment bezwładności 2,5 10^{-3} kg m^2. Jeżeli sznurek nie ślizga się po krążku, to jaka jest prędkość kątowa krążka po odwinięciu się 1 m sznurka? Załóż, że początkowo krążek się nie obracał.



Toczenie się ciał

Toczenie się ciał (bez poślizgu)

- Toczenie się lub ruch toczny ciał to ruch, który jest złożeniem ruchu obrotowego i postępowego ciał i obserwujemy go w wielu codziennych sytuacjach.
- Do precyzyjnego opisu ruchu toczenia się ciała niezbędne jest zrozumienie pojęcia siły i momentu siły.

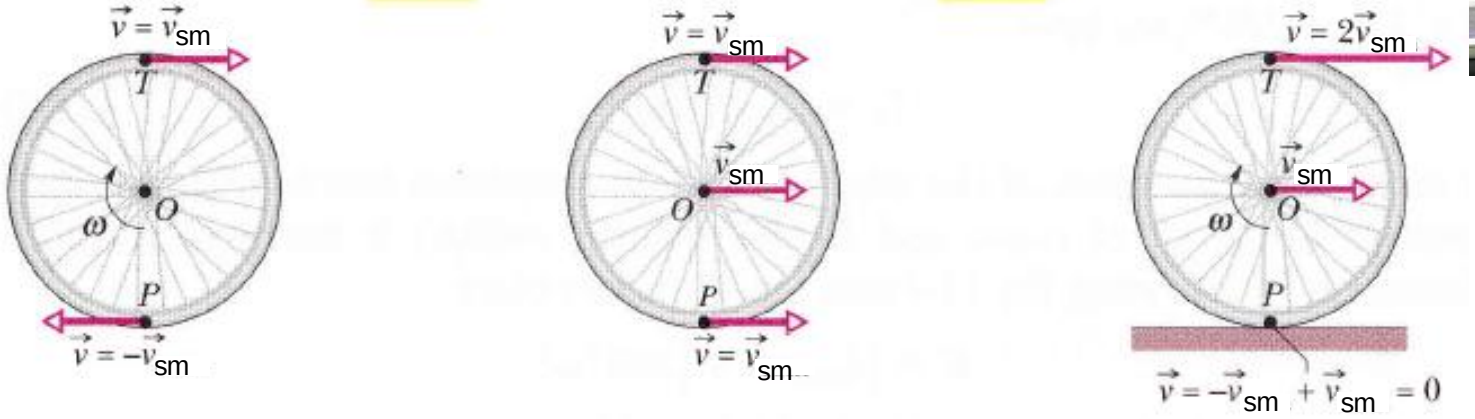


Toczenie się ciał

Toczenie się ciał (bez poślizgu)



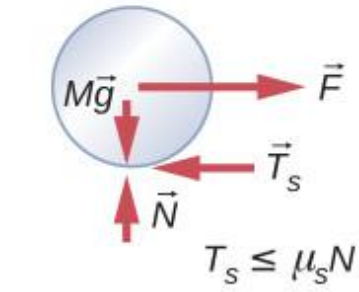
obrót + ruch postępowy = toczenie



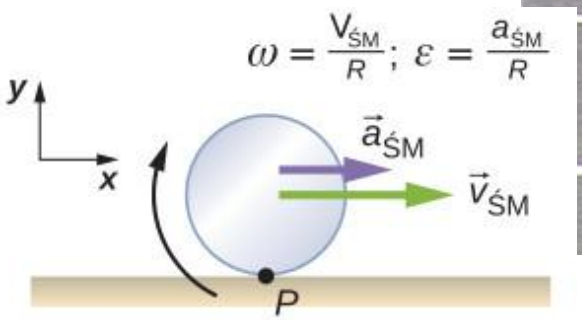
Toczenie się ciał

Toczenie się ciał (bez poślizgu)





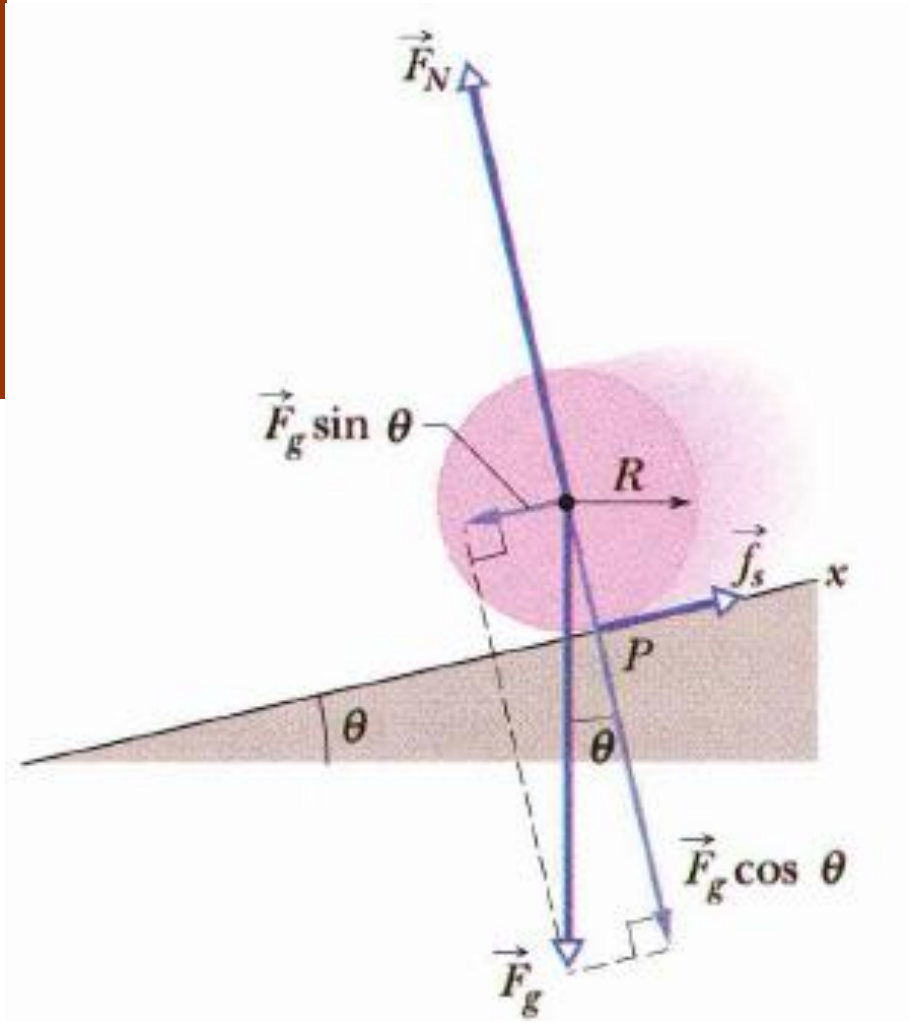
(a) Siły działające na koło



(b) Koło toczy się bez poślizgu

Toczenie się ciał

Toczenie się po równi pochyłej



$$mg\sin\theta - f_s = ma_{sm}$$

$$Rf_s = I_{sm}\varepsilon$$

$$f_s = I_{sm}\frac{a_{sm}}{R^2}$$

$$a_{sm} = \frac{g\sin\theta}{1 + I_{sm}/mR^2}$$

Zasada zachowania energii mechanicznej

Zachowanie energii mechanicznej podczas toczenia się

Każdy toczący się obiekt posiada energię kinetyczną ruchu obrotowego, a także energię kinetyczną ruchu postępowego i ewentualnie energię potencjalną. Łącznie z grawitacyjną energią potencjalną całkowita energia mechaniczna toczącego się ciała wynosi:

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{\text{ŚM}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{ŚM}} \omega^2 + mgh$$

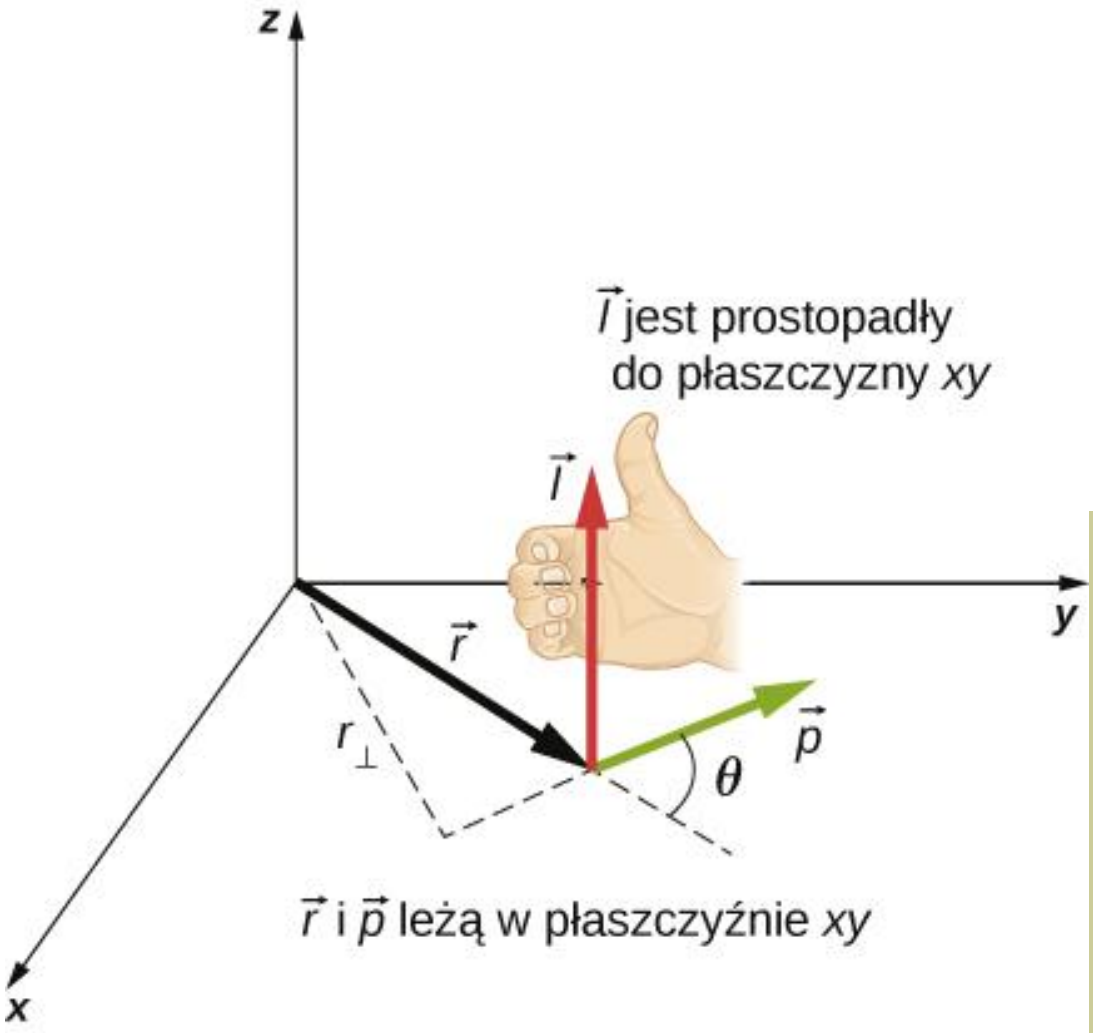
Przy braku sił niezachowawczych, które powodują rozpraszanie energii układu, całkowita energia mechaniczna toczącego się bez poślizgu ciała jest zachowana i jest stała podczas trwania całego ruchu.

Przykładem, gdzie energia mechaniczna nie jest zachowana, jest obiekt toczący się z poślizgiem. Mamy tu do czynienia z tarciem, wynikającym z poślizgu. Zatem rozpraszana jest energia kinetyczna.

Moment pędu

Moment pędu pojedynczej cząstki

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$



Moment pędu

Moment pędu układu cząstek

całkowity moment pędu układu cząstek jest sumą wektorową momentów pędu poszczególnych cząstek układu

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \cdots + \vec{l}_N$$

Moment pędu

Moment pędu układu cząstek

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathrm{v}} \times m\vec{\mathrm{v}} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

$\vec{\mathrm{v}} \times m\vec{\mathrm{v}} = 0$

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \quad i \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$$

Moment pędu

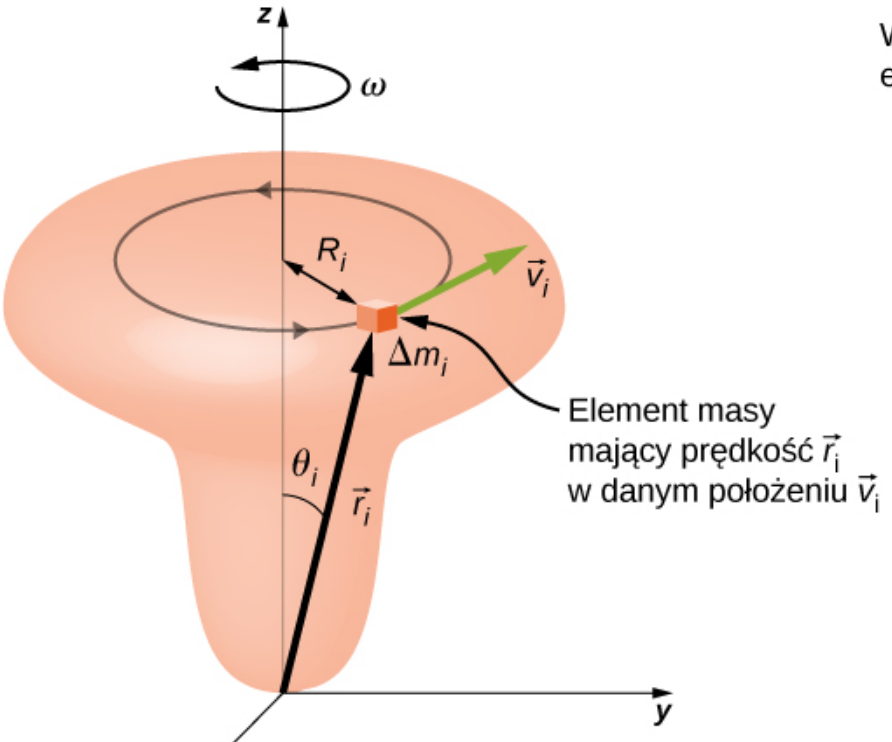
Moment pędu bryły sztywnej

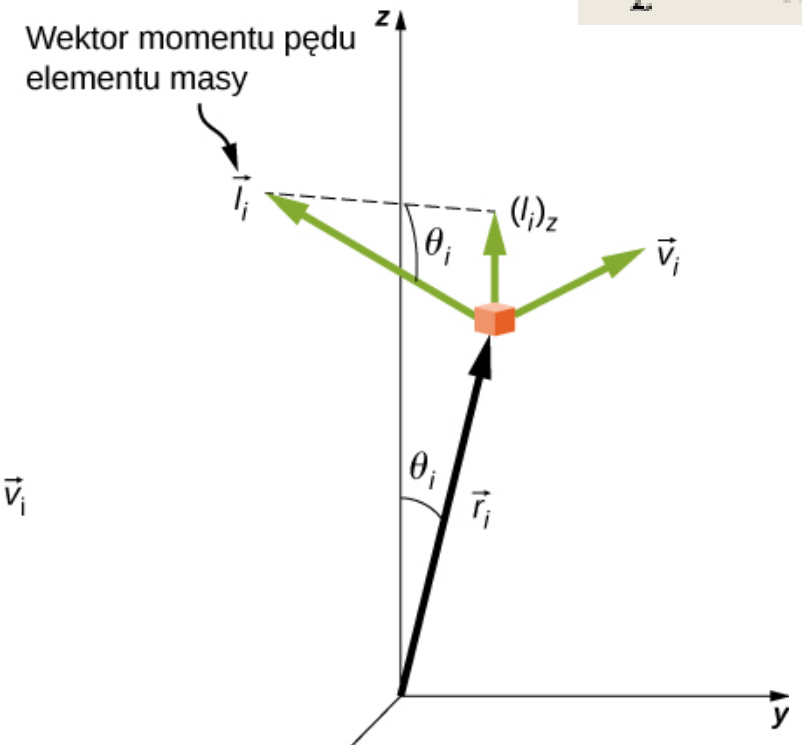
$$l_i = r_i \Delta m_i v_i \sin 90^\circ$$

$$(l_i)_z = l_i \sin\theta_i = r_i \Delta m_i v_i \sin\theta_i = r_i \sin\theta_i \cdot \Delta m_i v_i = R_i \Delta m_i v_i$$

$$L_z = \sum_i (l_i)_z = \sum_i R_i \Delta m_i v_i = \sum_i R_i \Delta m_i \cdot R_i \omega_z = \omega_z \sum_i \Delta m_i R_i^2$$

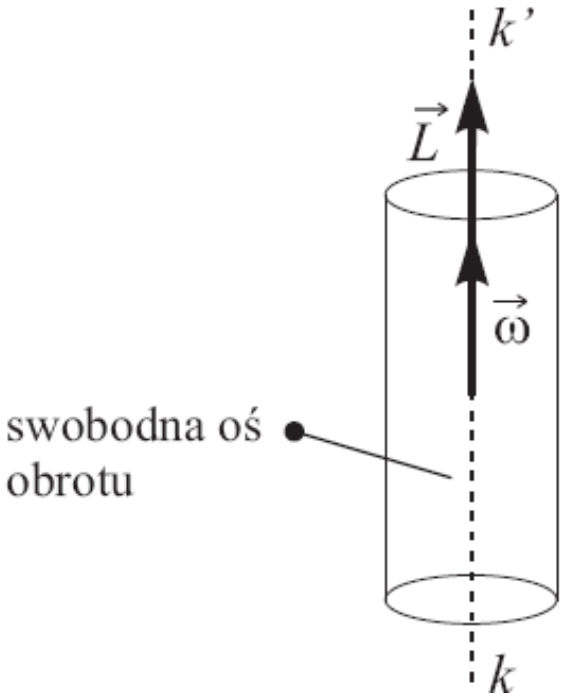
$$L_z = I\omega_z$$

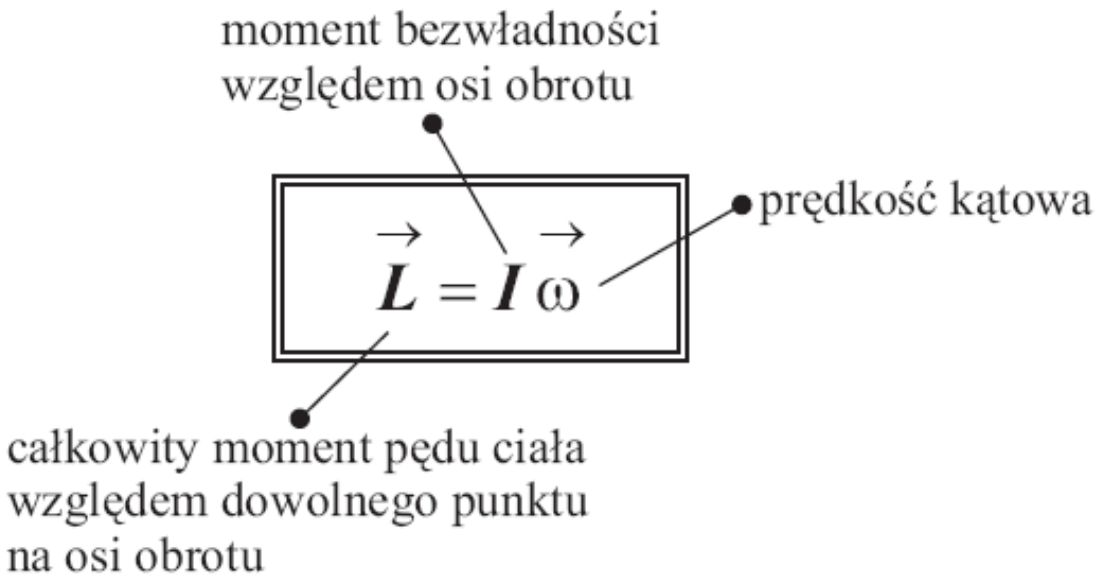




Moment pędu

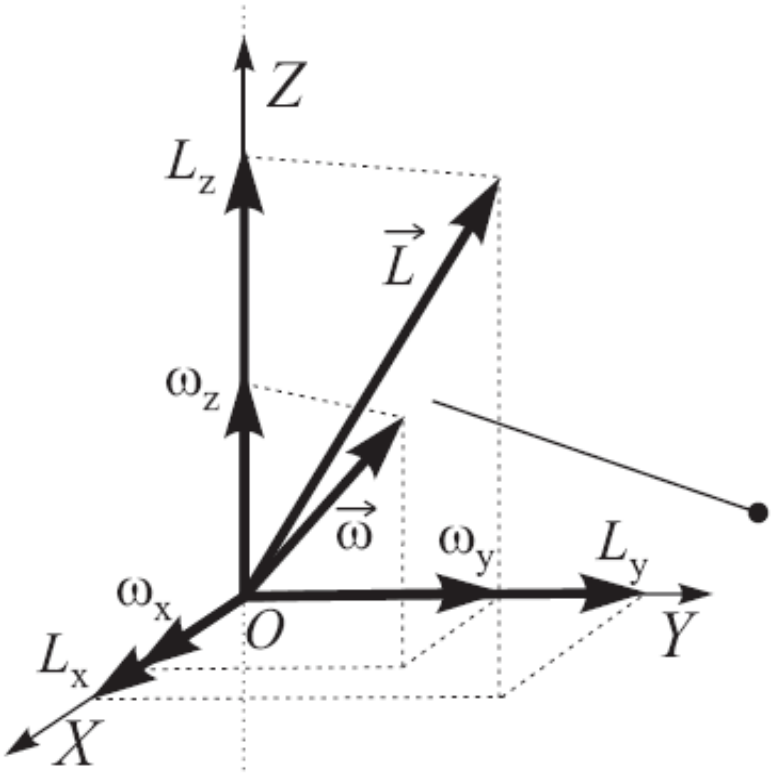
Moment pędu bryły sztywnej





Moment pędu

Moment pędu bryły sztywnej



tensor bezwładności

prędkość kątowa (chwilowa)

$$\vec{L} = \hat{I}\,\vec{\omega}$$

całkowity moment pędu ciała

wektor momentu pędu $\vec{L}$ nie musi być równoległy do wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Moment pędu

Zasada zachowania momentu pędu

Moment pędu układu cząstek wokół punktu, w ustalonym inercjalnym układzie odniesienia, jest zachowany, jeśli wypadkowy moment sił zewnętrznych względem tego punktu jest równy zero.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0$$

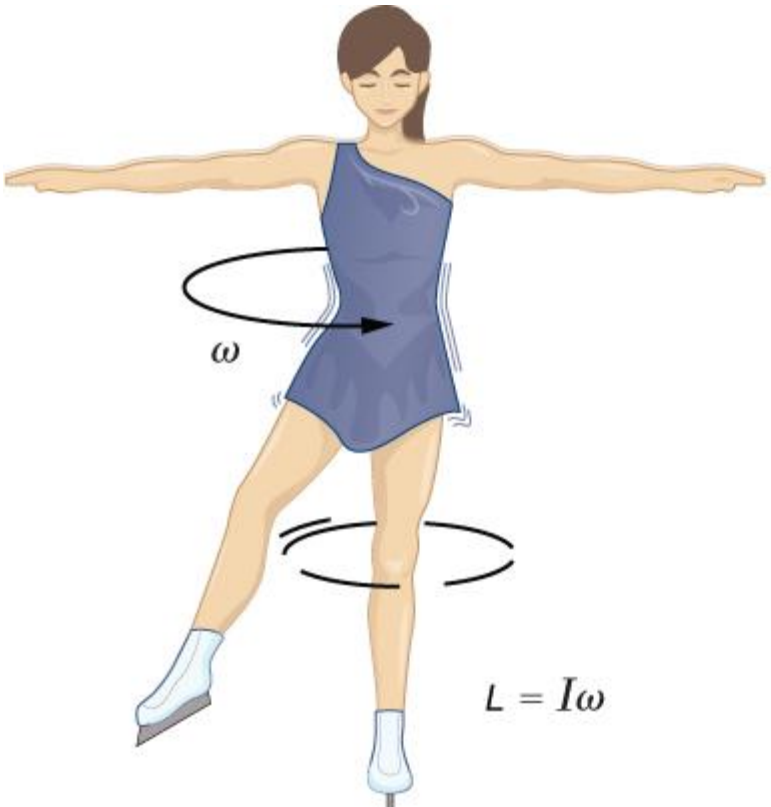
$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \ldots + \vec{l}_N = \text{constant}$$

Moment pędu

Zasada zachowania momentu pędu

$$L' = L$$

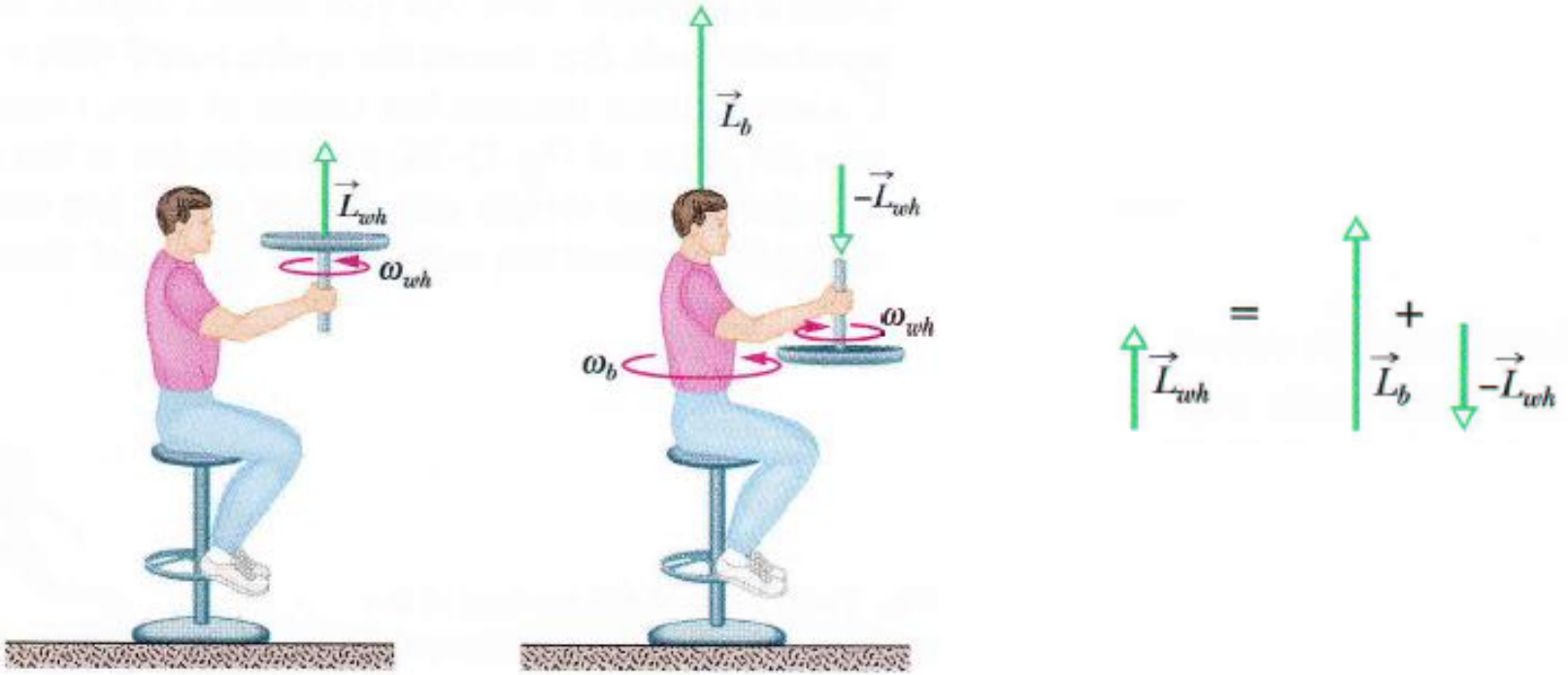
$$I'\omega' = I\omega$$





Moment pędu

Zasada zachowania momentu pędu – przykłady



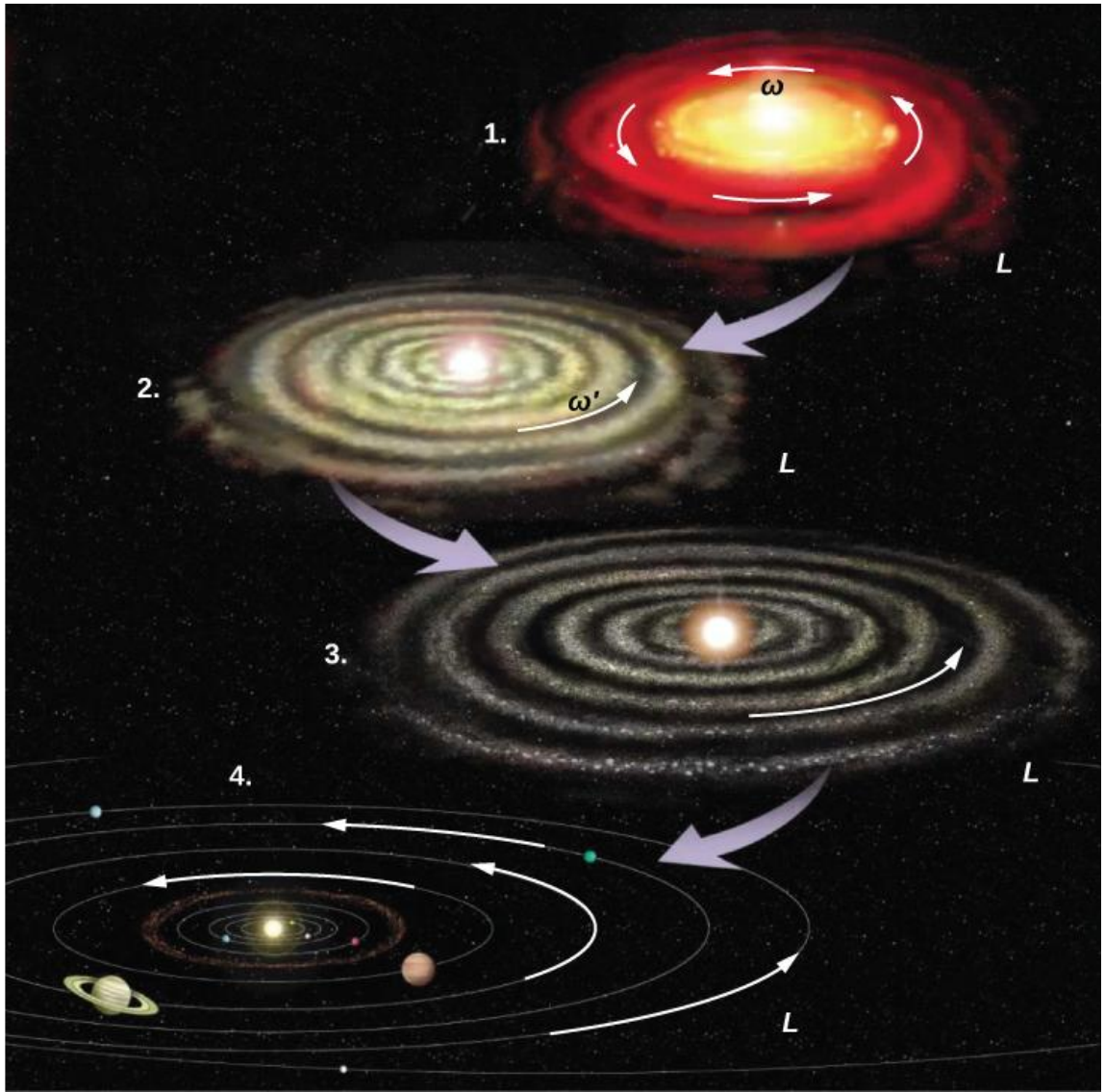
Moment pędu

Zasada zachowania momentu pędu – przykłady



Moment pędu

Zasada zachowania momentu pędu

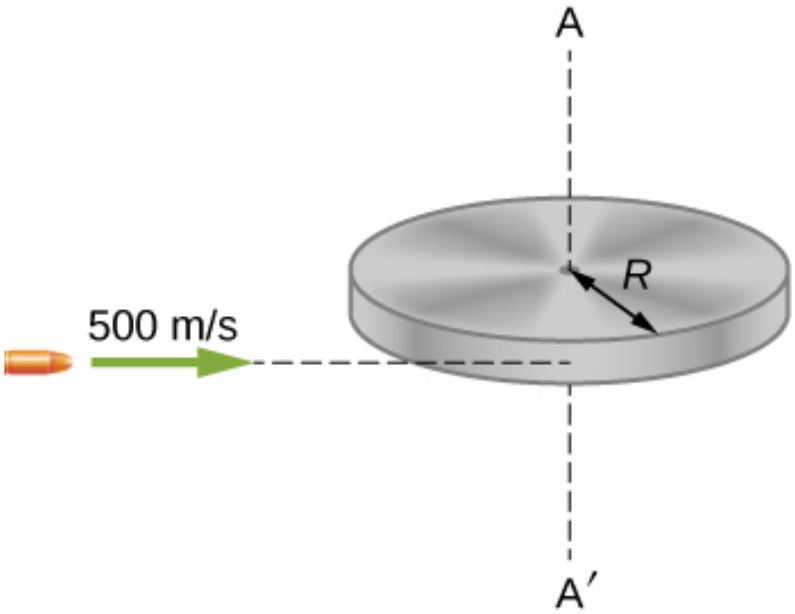


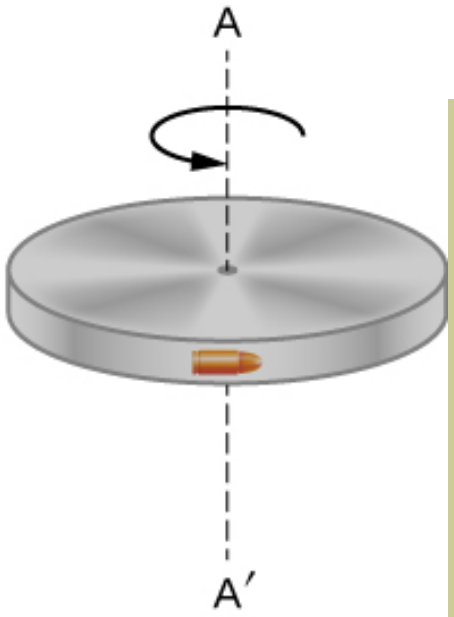
Moment pędu

Zasada zachowania momentu pędu – przykład

Pocisk o masie 2 kg, poruszając się poziomo z prędkością 500 m/s, uderzył w brzeg tarczy i utkwił w nim. Tarcza ma masę 3,2 kg oraz promień 0,5 m. Może się ona swobodnie obracać wokół swojej osi.

Jeżeli tarcza była początkowo w spoczynku, to jaka jest prędkość kątowa tarczy natychmiast po tym, jak pocisk utkwił w jej brzegu?





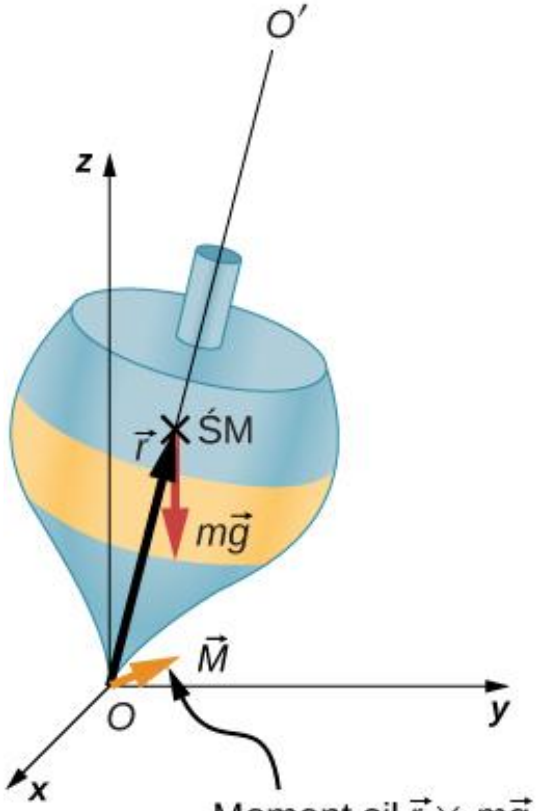
Moment pędu

Żyroskop (ang. gyroscope), definiujemy jako wirujący dysk (ciało – bryłę sztywną o symetrii osiowej), obracający się wokół własnej osi symetrii, przy czym oś obrotu jest osią swobodną - może przyjąć dowolny kierunek w przestrzeni.
Podczas wirowania kierunek osi obrotu żyroskopu jest niezależny od orientacji układu, w którym żyroskop jest umieszczony. Żyroskop można przenosić z miejsca na miejsce, a orientacja (kierunek) osi obrotu pozostaje taka sama.
To sprawia, że żyroskopy są bardzo przydatne w nawigacji.

Moment pędu

Precesja

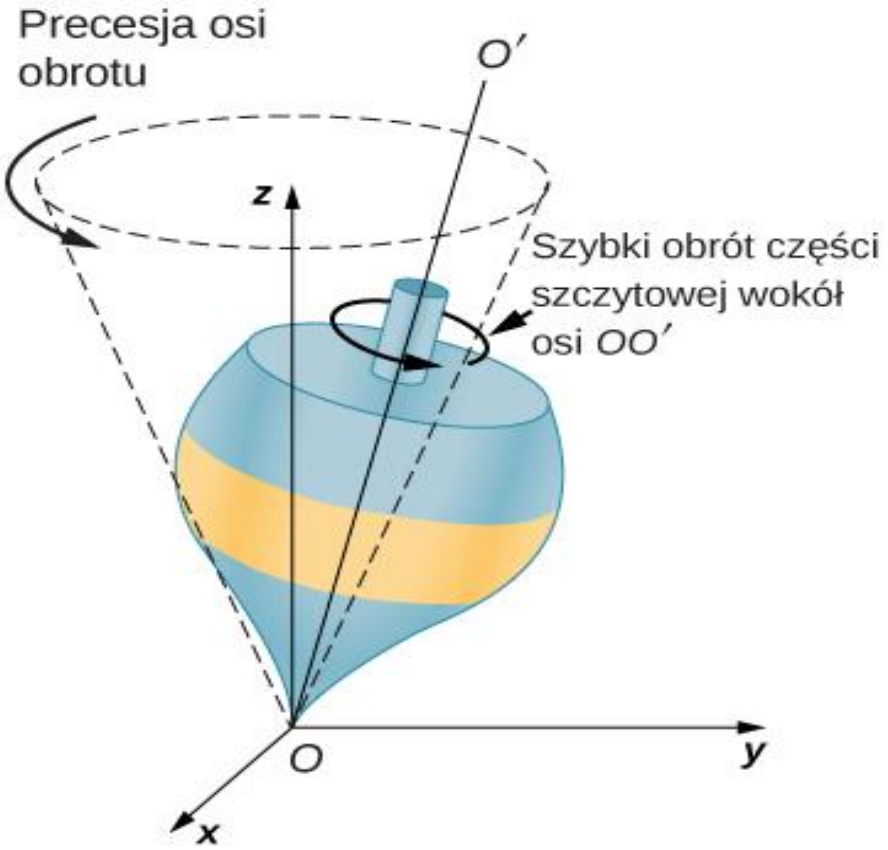
Jeśli punkt podparcia bączka jest umieszczony na płaskiej powierzchni w pobliżu powierzchni Ziemi, oś symetrii tworzy kąt z pionem, a bączek nie kręci się, to moment siły działający na środek ciężkości żyroskopu powoduje jego przewrócenie.



Moment pędu

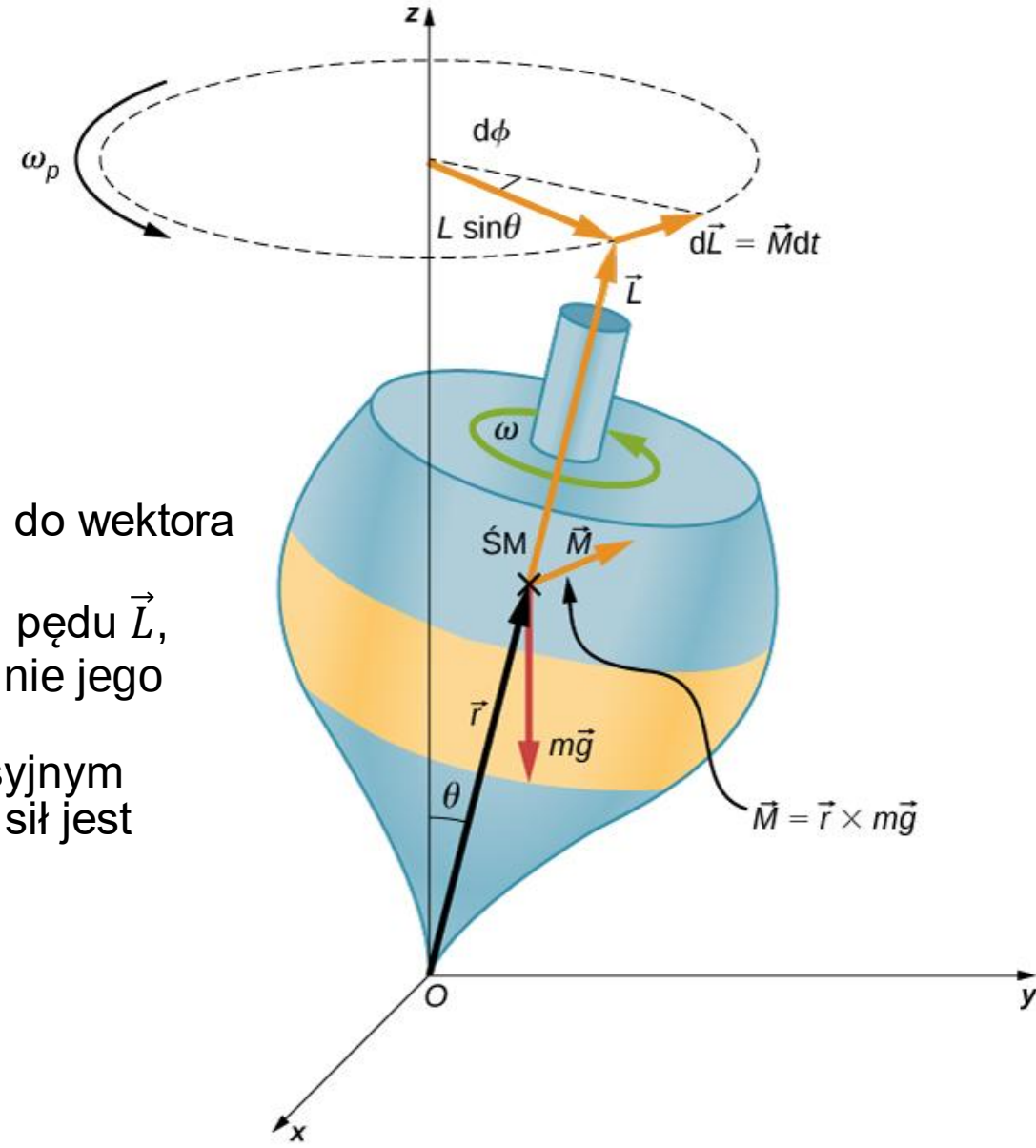
Precesja

Jeśli bączek wiruje wokół swojej osi symetrii, to zamiast się przewrócić, z powodu działania momentu siły ciężkości, oś obrotu wykonuje ruch precesyjny (dokonuje precesji), tzn. oś symetrii bączka obraca się wokół określonego kierunku w przestrzeni, zakreślając powierzchnię boczną stożka.



Moment pędu

Precesja



Wektor momentu sił działa prostopadle do wektora momentu pędu.

Zmienia on kierunek wektora momentu pędu $\vec{L}$, zgodnie z zależnością $\mathrm{d}\vec{L} = \vec{M} \cdot \mathrm{d}t$, ale nie jego wartość.

Oś symetrii porusza się ruchem precesyjnym wokół osi pionowej, ponieważ moment sił jest zawsze poziomy i prostopadły do $\vec{L}$.

Moment pędu

Wiemy, jak łatwo jest przewrócić się na rowerze (motocyklu), gdy siedzi się na nim w stanie spoczynku.
Podczas jazdy, jest to trudniejsze (tym trudniejsze im, większa jest prędkość), ponieważ, chcąc się przewrócić, musimy zmienić wektor momentu pędu obracających się kół.

Dziękuję za uwagę!