Fizyka 1B

Wykład 6

dr Piotr Sitarek, prof. uczelni

Katedra Fizyki Doświadczalnej

Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej

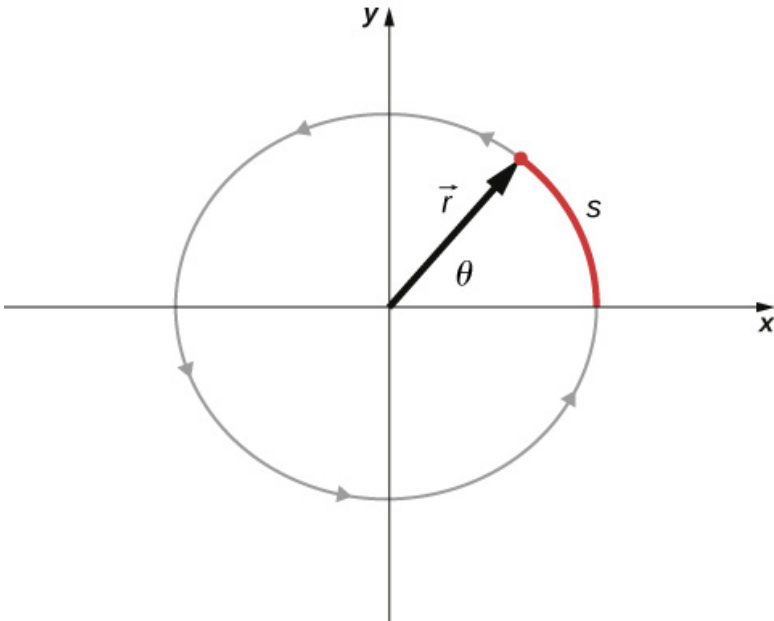
Ruch obrotowy

- Obroty ze stałym przyspieszeniem kątowym
- Związek między wielkościami w ruchach obrotowym i postępowym
- Moment bezwładności i energia kinetyczna w ruchu obrotowym
- Obliczanie momentu bezwładności

Ruch obrotowy

Zmienne opisujące ruch obrotowy

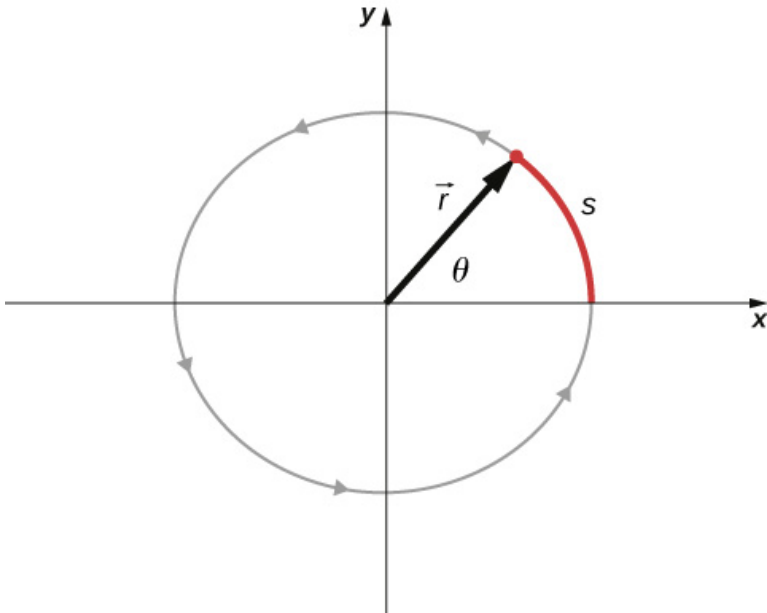
- Jednostajny ruch po okręgu jest ruchem po okręgu ze stałą wartością prędkości (szybkością).
- cząstka poruszająca się po okręgu,
- wektor położenia cząstki tworzy kąt θ z osią x,
- kąt rośnie w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, gdy cząstka przesuwa się po okręgu,
- kąt θ nazywamy położeniem kątowym cząstki.
- W miarę przesuwania się cząstki po okręgu zakreśla ona łuk o długości s.



Ruch obrotowy

Zmienne opisujące ruch obrotowy

- Związek pomiędzy wartością kąta θ a promieniem okręgu i długością łuku wyraża się wzorem: $\theta = \frac{s}{r}$
- Kąt θ, kątowe położenie cząstki, mierzony jest w radianach (rad). Kąt radianów odpowiada w mierze łukowej kątowi 360°.
- Należy zauważyć, że kąt wyrażony w radianach jest ilorazem dwóch długości, a zatem jest wielkością bezwymiarową.

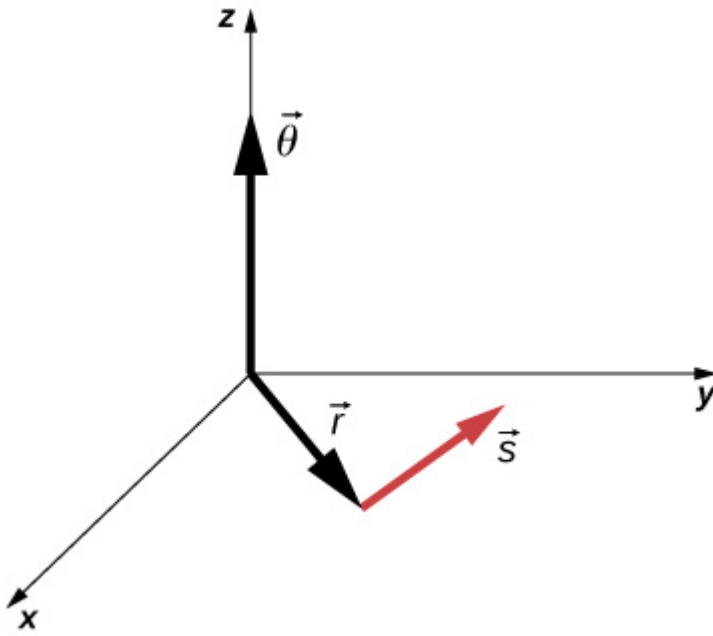


Ruch obrotowy

Zmienne opisujące ruch obrotowy

- Kątowi θ możemy przypisać wektor $\vec{\theta}$.
- Wektor $\vec{\theta}$ jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny *xy*.
- Wektory położenia $\vec{r}$ i $\vec{s}$ długości łuku leżą w płaszczyźnie *xy*.
- Te trzy wektory związane są relacją:

$$\vec{s} = \vec{\theta} \times \vec{r}$$



Ruch obrotowy

Zmienne opisujące ruch obrotowy – prędkość kątowa

- Wartość wektora prędkości kątowej oznaczamy jako ω, jest szybkością zmian kąta θ, gdy cząstka porusza się po łuku.
- Chwilowa wartość prędkości kątowej

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

- Jednostką prędkości kątowej jest radian na sekundę (rad/s).
- Prędkość kątową możemy w prosty sposób powiązać z częstotliwością *f* (wyrażaną w obrotach na sekundę - obr/s):

$$\omega = 2\pi f$$

Ruch obrotowy

Zmienne opisujące ruch obrotowy – prędkość kątowa

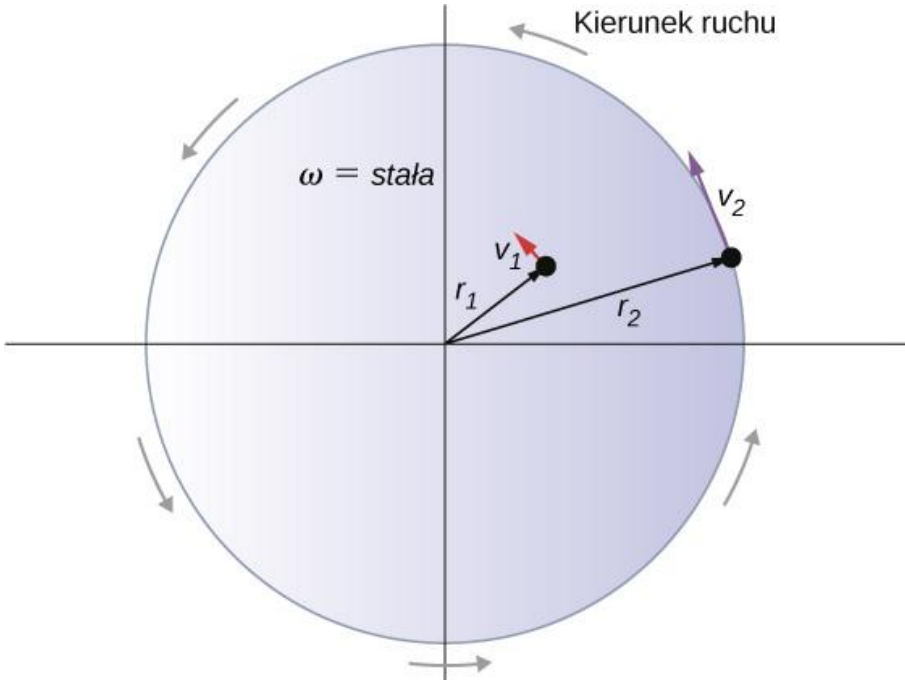
- zapiszmy $s = r\theta$, obliczając pochodną po czasie:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(r\theta) = \theta\frac{dr}{dt} + r\frac{d\theta}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

$\frac{dr}{dt} \to 0$, $\frac{d\theta}{dt} \to \omega$

- otrzymujemy równanie wiążące prędkość liniową i kontową

$$v = r\omega$$

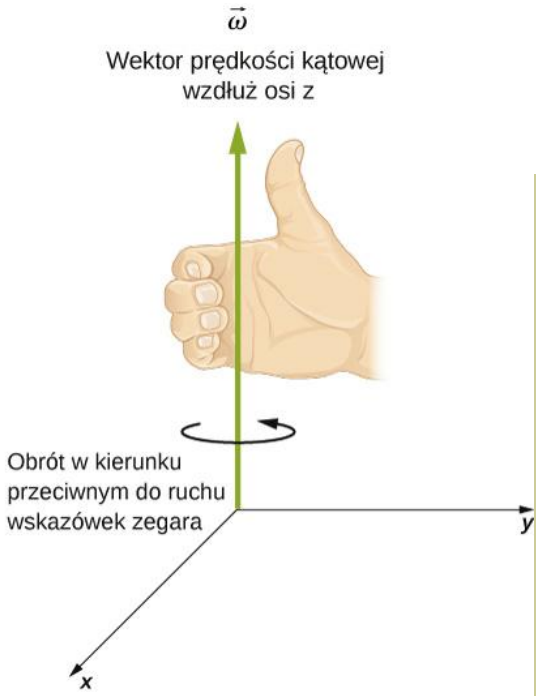


Ruch obrotowy

Zmienne opisujące ruch obrotowy – prędkość kątowa

- Wektor $\vec{\omega}$ jest wektorem związanym z prędkością kątową i jest skierowany wzdłuż osi obrotu.
- Ostatecznie

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



Ruch obrotowy

Zmienne opisujące ruch obrotowy – przyspieszenie kątowe

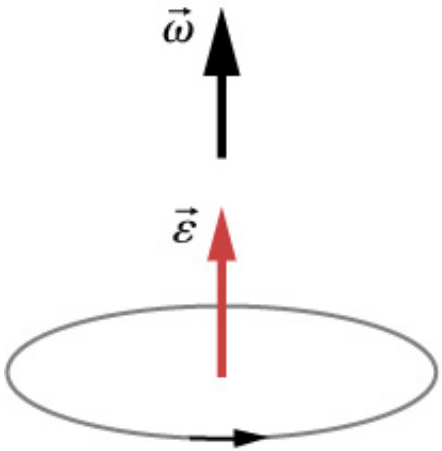
- Podobnie jak w ruchu prostoliniowym dobrze jest umieć określić szybkość zmian prędkości kątowej czyli przyspieszenie kątowe.
- Chwilowe przyspieszenie kątowe

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

- Jednostką przyspieszenia kątowego jest rad/s^2.

Ruch obrotowy

Zmienne opisujące ruch obrotowy – przyspieszenie kątowe



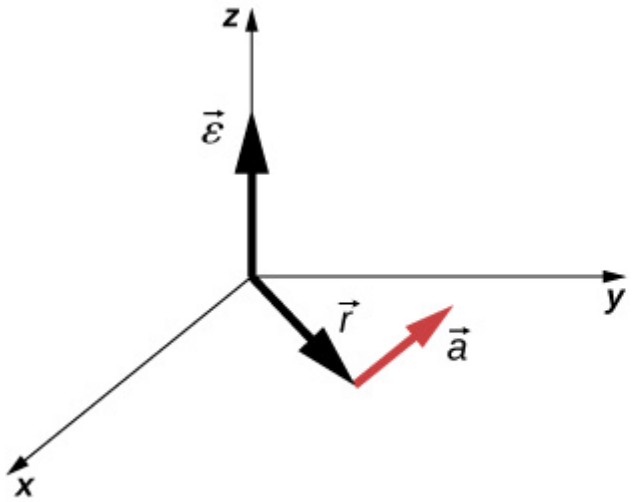
(a) Obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, prędkość kątowa rośnie

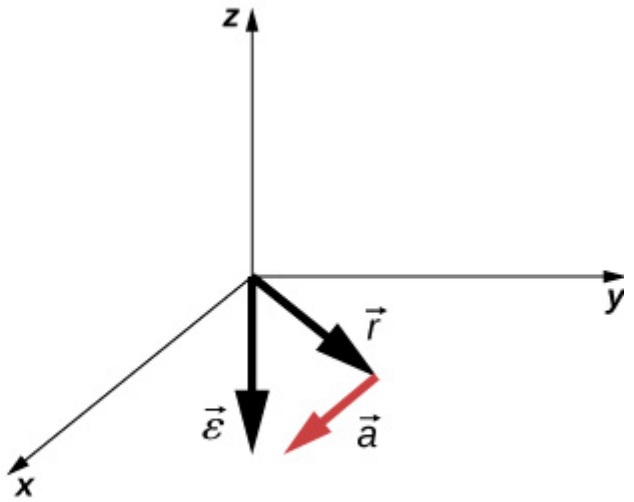
Ruch obrotowy

Zmienne opisujące ruch obrotowy – przyspieszenie kątowe

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_s = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$





Ruch obrotowy

Obroty ze stałym przyspieszeniem kątowym

Zależność drogi kątowej (położenia kątowego) od średniej prędkości kątowej	$\theta_k = \theta_0 + \bar{\omega}t$
Zależność prędkości kątowej od stałego przyspieszenia kątowego	$\omega_k = \omega_0 + \varepsilon t$
Zależność drogi kątowej (położenia kątowego) od początkowej prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego	$\theta_k = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$

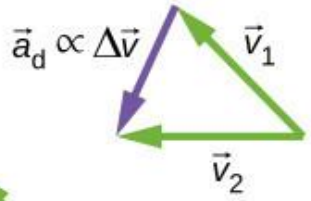
Ruch obrotowy

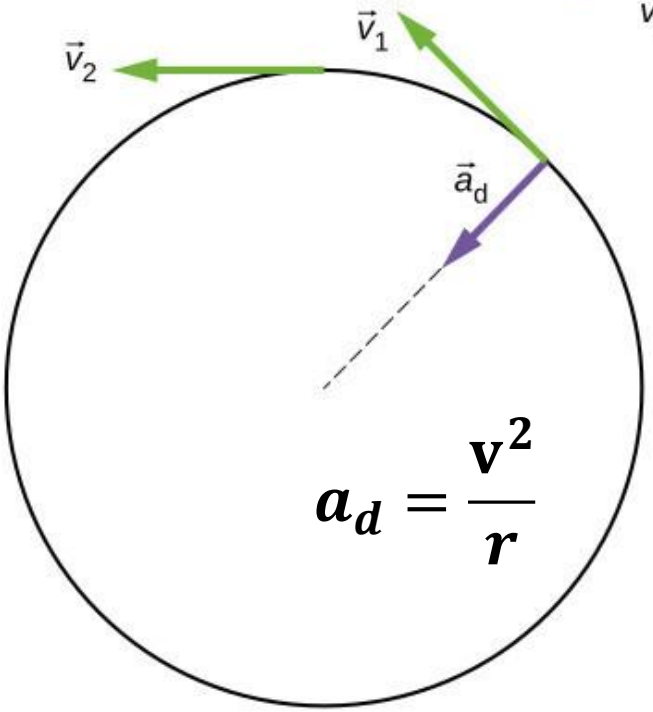
Zmienne kątowe a zmienne liniowe

	Liniowe	Obrotowe
Położenie	x	θ
Prędkość	$v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$	$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$
Przyspieszenie	$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$	$\varepsilon = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$

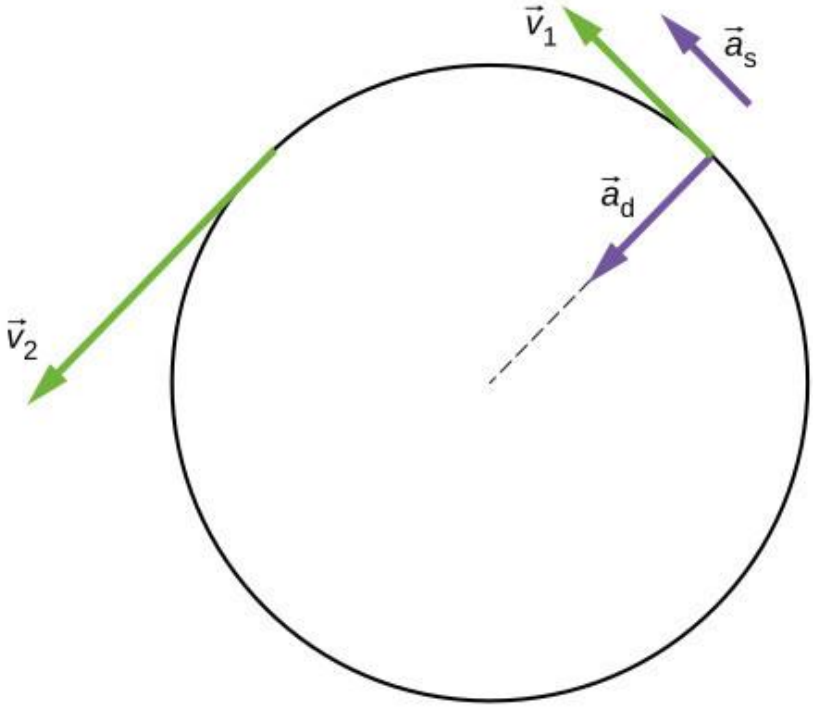
Ruch obrotowy

Zmienne kątowe a zmienne liniowe





$$a_s = r\varepsilon$$



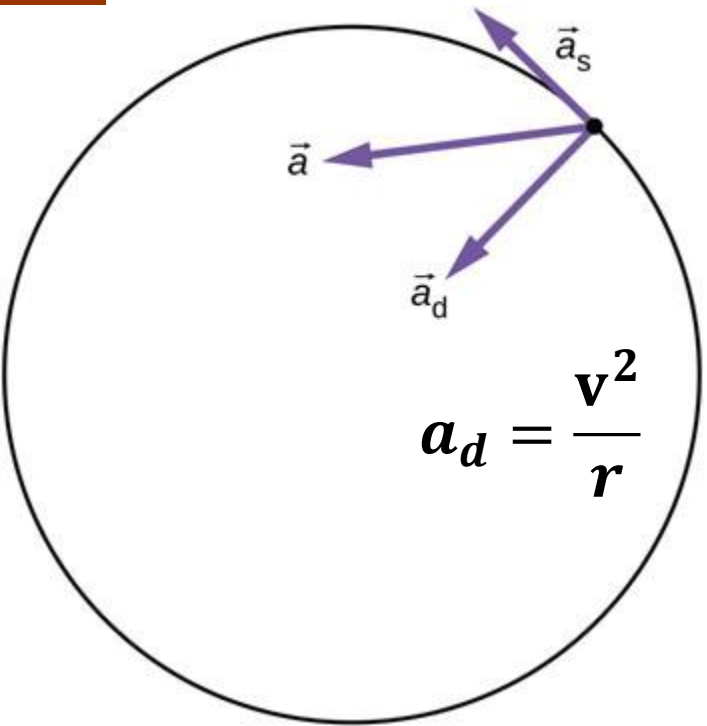
Ruch obrotowy

Zmienne kątowe a zmienne liniowe

$$a_s = r\varepsilon$$

$$\vec{a}_{\mathrm{d}} \perp \vec{a}_{\mathrm{s}}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{\mathrm{d}} + \vec{a}_{\mathrm{s}}$$



$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_{\mathrm{d}}^2 + a_{\mathrm{s}}^2}$$

$$a_d = \frac{\mathbf{v}^2}{r}$$

Ruch obrotowy

Zmienne kątowe a zmienne liniowe

Ruch obrotowy	Ruch postępowy
$\theta_k = \theta_0 + \bar{\omega}t$	$x = x_0 + \bar{v}t$
$\omega_k = \omega_0 + \varepsilon t$	$v_k = v_0 + at$

Ruch obrotowy	Ruch postępowy
$\theta_k = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$	$x_k = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega_k^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon(\Delta\theta)$	$v_k^2 = v_0^2 + 2a(\Delta x)$

Ruch obrotowy	Ruch postępowy	Związek pomiędzy wielkościami (r = promień okręgu)
θ	s	$\theta = s/r$
ω	v	$\omega = v/r$
ε	a_s	$\varepsilon = a_s/r$
	a_d	$a_d = v^2/r$

Ruch obrotowy

Energia kinetyczna ruchu obrotowego

- Podobnie jak w ruchu postępowym - dowolne obracające się ciało ma energię kinetyczną.
- Analogia nie jest pełna ponieważ w czasie wykonywania obrotu każdy punkt ciała ma inną prędkość liniową.
- W celu wyznaczenia energii kinetycznej ruchu obrotowego możemy posłużyć się prędkością kątową, która ma taką samą wartość dla każdego punktu obracającego się ciała.

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2$$

Ruch obrotowy

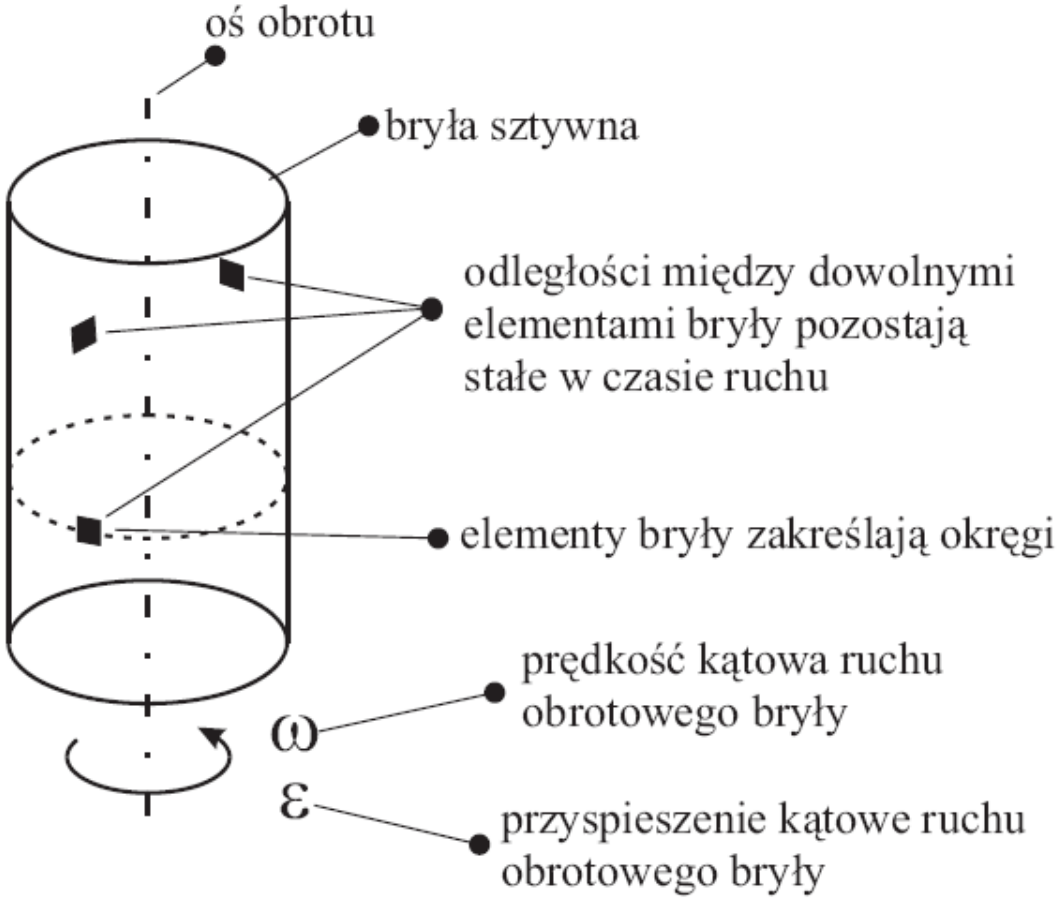
Dotychczas zajmowaliśmy się głównie ruchem ciała (punktu materialnego), teraz zajmiemy ruchem ciała rozciągłego – bryły sztywnej.

Bryłą sztywną nazywamy takie ciało, w którym odległości pomiędzy poszczególnymi jego elementami nie zmieniają się, niezależnie od działających sił.
Jeżeli bryła sztywna wiruje wokół osi obrotu, to prędkość kątowa i przyspieszenie kątowe wszystkich jej elementów są jednakowe.

Ruch obrotowy

Bryła sztywna (ciało sztywne)





Ruch obrotowy

Energia kinetyczna ruchu obrotowego

- wróćmy do energii kinetycznej

$$E_k = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2$$

- podzielmy teraz obracającą się bryłę sztywną (ciało) na dużą liczbę małych fragmentów, każdy o masie m_j i odległości r_j od osi obrotu. Każdy z fragmentów będzie miał prędkość v_j,
- masę całego ciała można teraz zapisać jako $M = \sum_j m_j$
- energię kinetyczną obracającej się bryły można teraz zapisać jako sumę energii kinetycznych wszystkich jej fragmentów:

$$E_k = \sum_j \frac{1}{2} m_j v_j^2 = \sum_j \frac{1}{2} m_j (r_j \omega_j)^2$$

Ruch obrotowy

Energia kinetyczna ruchu obrotowego - Moment bezwładności

- ponieważ $\omega_j = \omega$

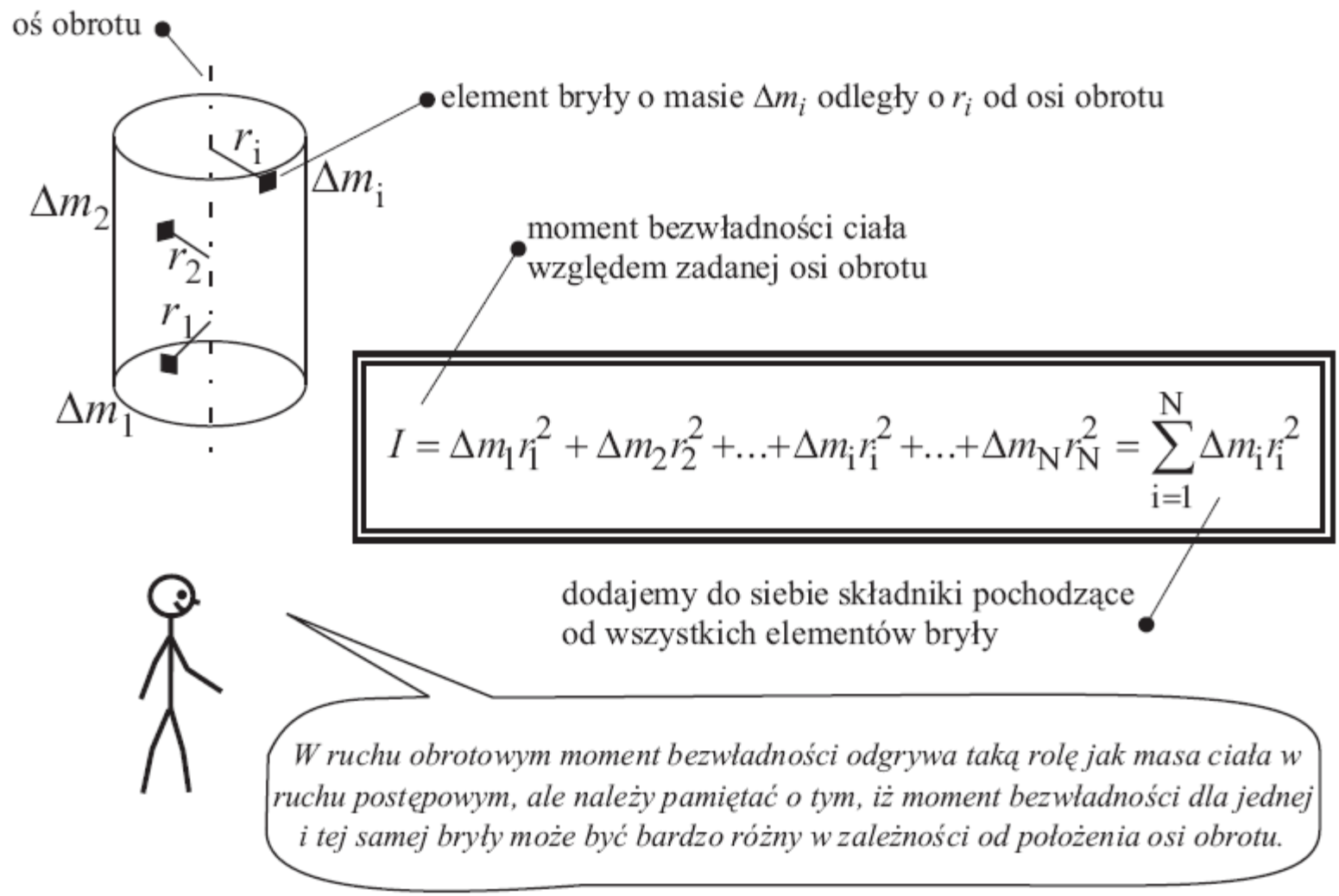
$$E_k = \frac{1}{2}\left(\sum_j m_j r_j^2\right)\omega^2$$

- jeśli porównamy to wyrażenie do wyrażenia na energię kinetyczną ruchu postępowego, to zauważymy, że $\sum_j m_j r_j^2$ jest odpowiednikiem masy w równaniu na energię kinetyczną ruchu postępowego,
- wielkość tą nazywamy momentem bezwładności (ang. *moment of inertia*), a jej jednostką jest kg m^2:

$$I = \sum_j m_j r_j^2$$

Ruch obrotowy

Moment bezwładności



Ruch obrotowy

Moment bezwładności

$$I = \sum_j m_j r_j^2$$

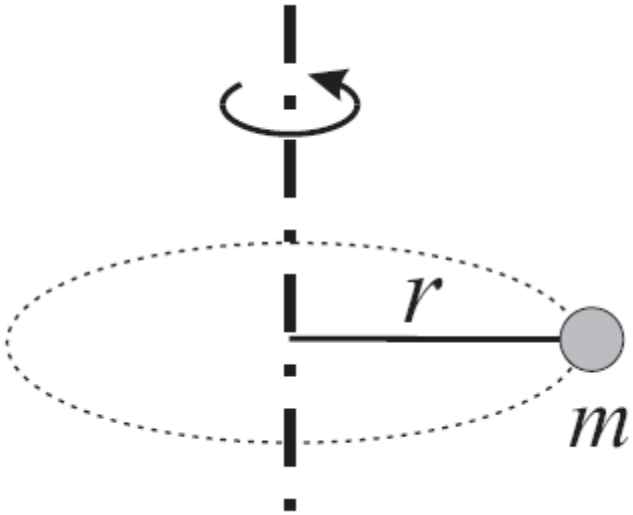
- Moment bezwładności jest ilościową miarą bezwładności obrotowej (podobnie jak w ruchu postępowym masa).
- Im większa wartość momentu bezwładności bryły sztywnej lub układu cząstek, tym bardziej ciało to przeciwstawia się zmianie prędkości kątowej w jego obrocie wokół stałej osi.
- Energię kinetyczną w ruchu obrotowym zapisać więc możemy jako

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Ruch obrotowy

Moment bezwładności punktu materialnego

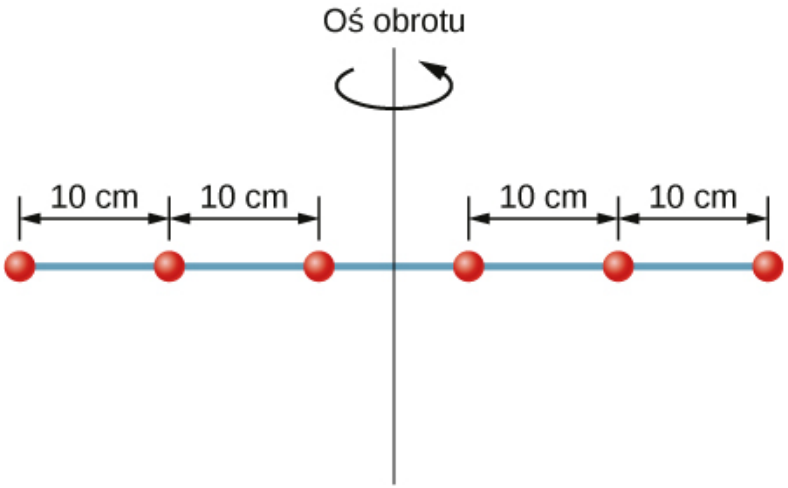
$$I = mr^2$$



wielkość charakterystyczna dla danego ciała i określonej osi obrotu

Ruch obrotowy

Moment bezwładności układu cząstek



Sześć małych nakrętek umieszczono na pręcie o pomijalnej masie i o długości 0,5 m, masa każdej z nakrętek wynosiła 20 g.

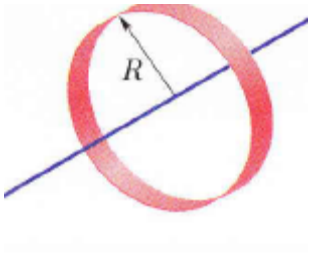
a. Jaki jest moment bezwładności układu nakrętek?

b. Jeżeli usuniemy dwie nakrętki leżące najbliżej osi obrotu, to jaki będzie moment bezwładności układu pozostałych nakrętek?

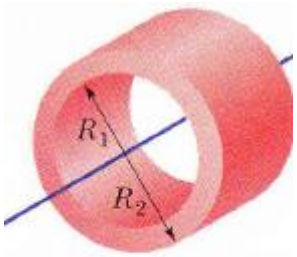
c. Jeżeli układ sześciu nakrętek obraca się z częstotliwością 5 obr/s, to jaka jest jego energia kinetyczna?

Ruch obrotowy

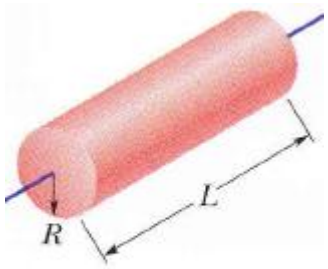
Moment bezwładności – przykłady



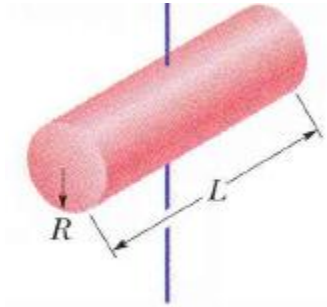
$I = MR^2$



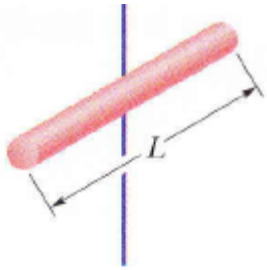
$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$



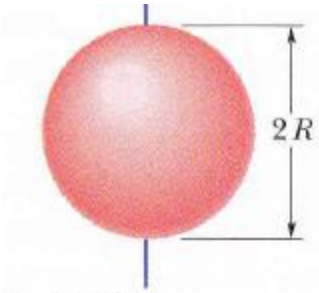
$I = \frac{1}{2}MR^2$



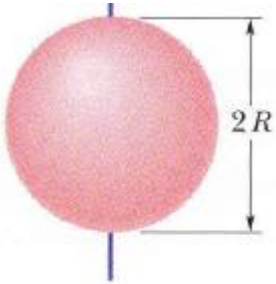
$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$



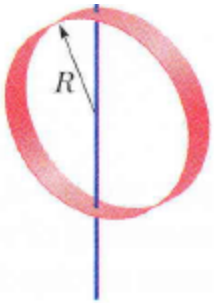
$I = \frac{1}{12}ML^2$



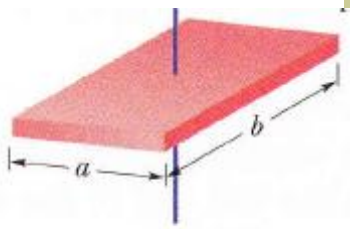
$I = \frac{2}{5}MR^2$



$I = \frac{2}{3}MR^2$



$I = \frac{1}{2}MR^2$



$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$

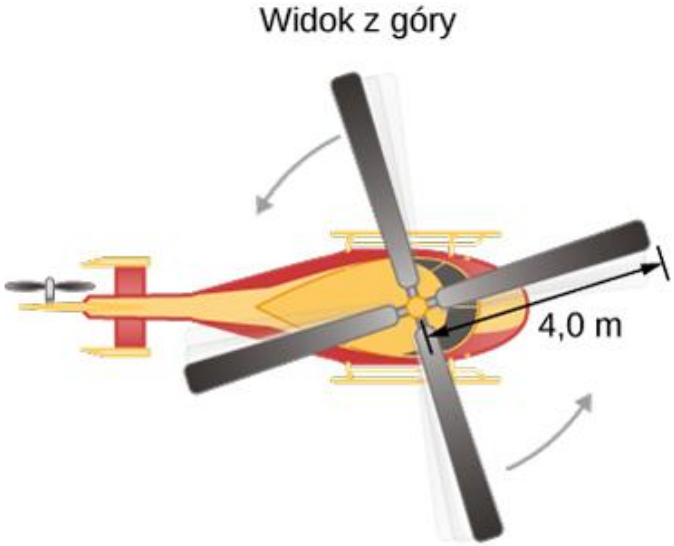
Ruch obrotowy

Moment bezwładności – przykłady

Typowy mały helikopter ratunkowy ma cztery łopaty wirnika: każda ma długość 4 m i masę m = 50 kg. Łopaty można rozpatrywać jako cienkie pręty, które obracają się wokół jednego z końców, wokół osi prostopadłej do ich długości. Całkowita masa załadowanego helikoptera wynosi M = 1000 kg.

a. Oblicz energię kinetyczną ruchu obrotowego łopat wirnika, jeśli ich prędkość obrotowa wynosi 300 obr/min.

b. Oblicz energię kinetyczną ruchu postępowego helikoptera, gdy leci on z prędkością 20 m/s, i porównaj ją z energią kinetyczną ruchu obrotowego łopat.

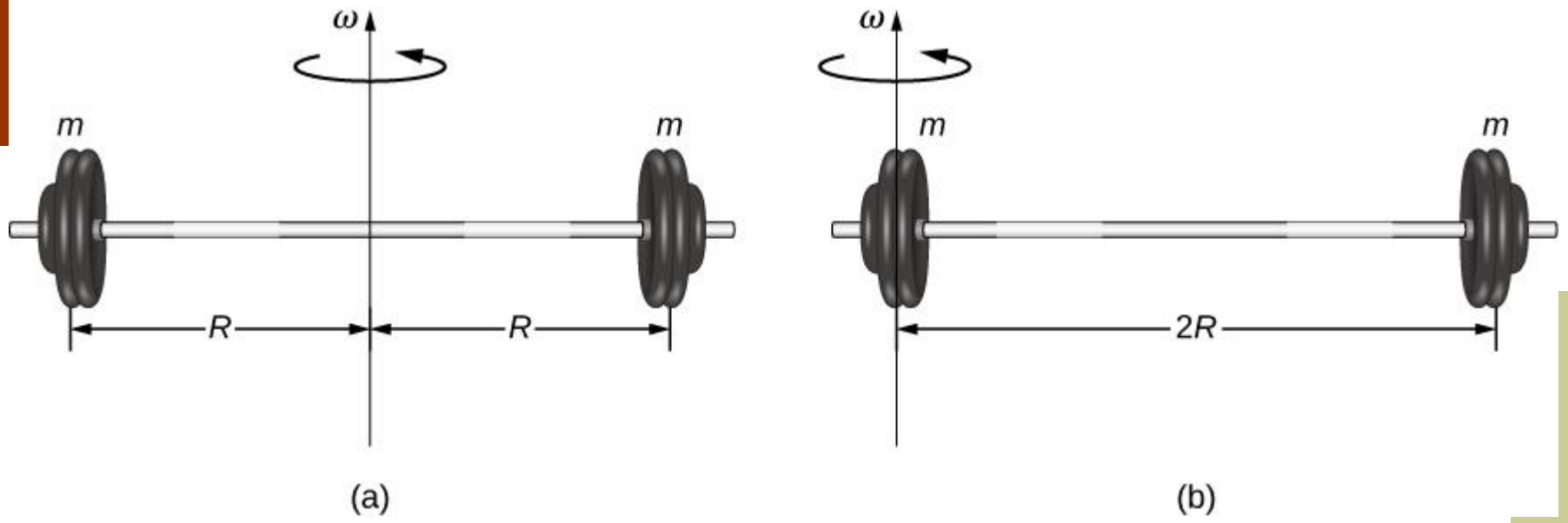




Ruch obrotowy

Moment bezwładności – przykłady

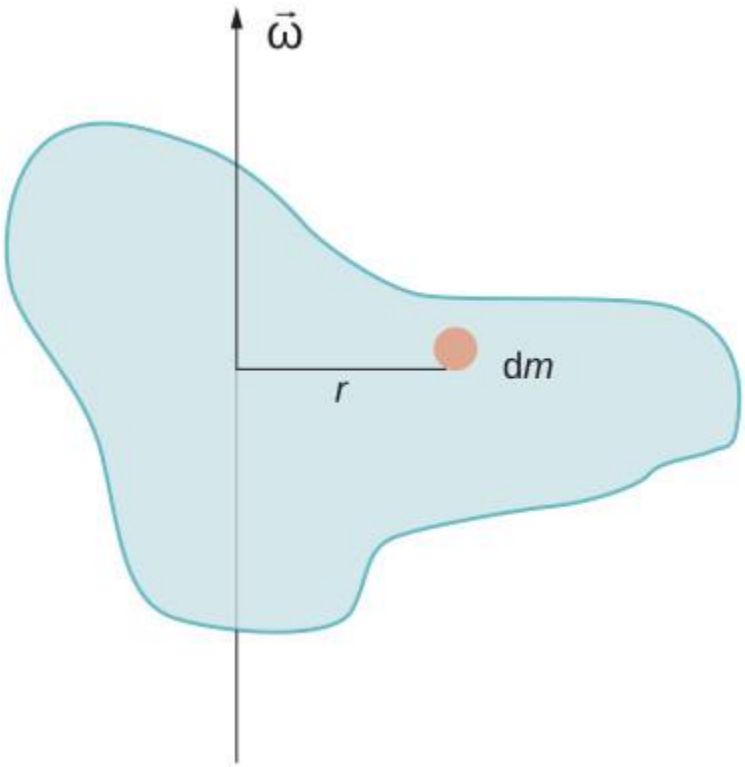
- wartość momentu bezwładności będzie zależała od wyboru osi, czyli od rozkładu masy względem osi,
- weźmy sztangę i obliczmy moment bezwładności względem dwóch różnych osi



Ruch obrotowy

Moment bezwładności - ciało ciągłe

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{zmienia się w równanie} \quad I = \int r^2 \, dm$$

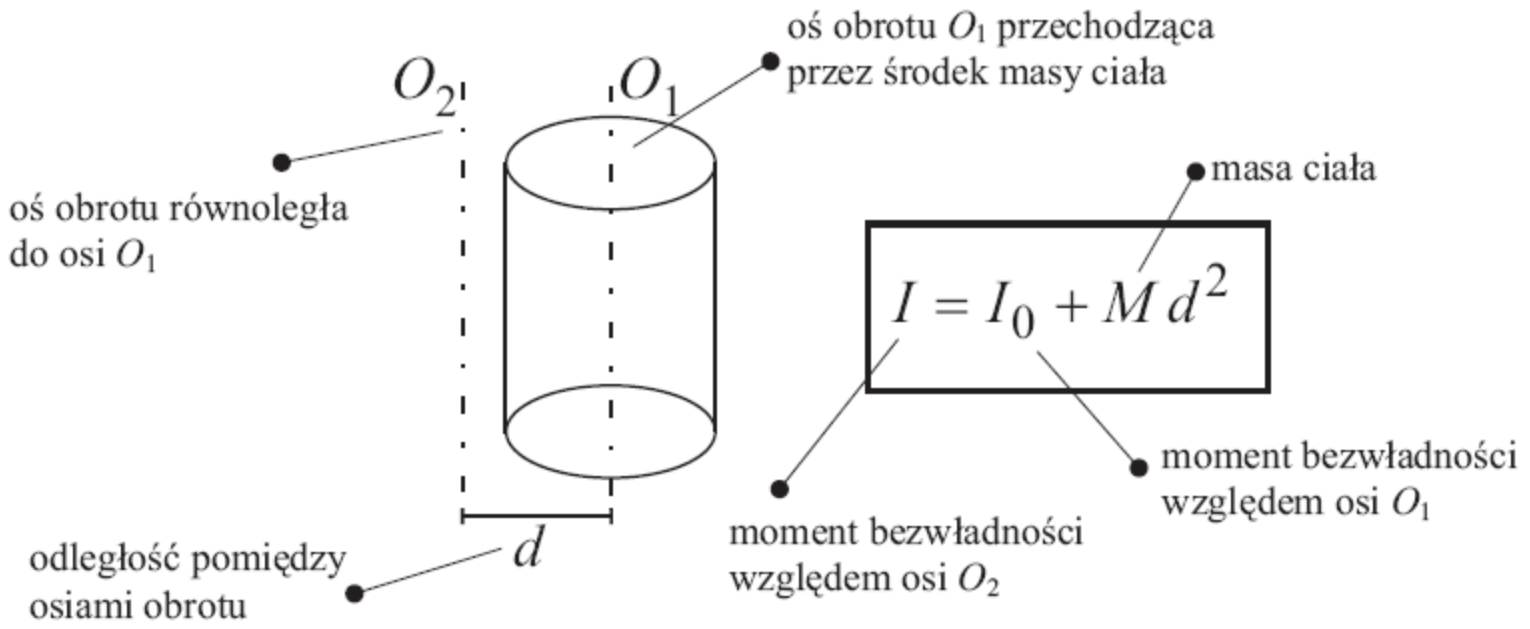


Ruch obrotowy

Twierdzenie Steinera

Moment bezwładności względem osi równoległej do osi przechodzącej przez środek masy jest sumą momentu bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy oraz iloczynu masy i kwadratu odległości pomiędzy osiami:

$$I_{\text{oś równoległa}} = I_{\text{środek masy}} + md^2$$



Dziękuję za uwagę!