Fizyka 1B

Wykład 5

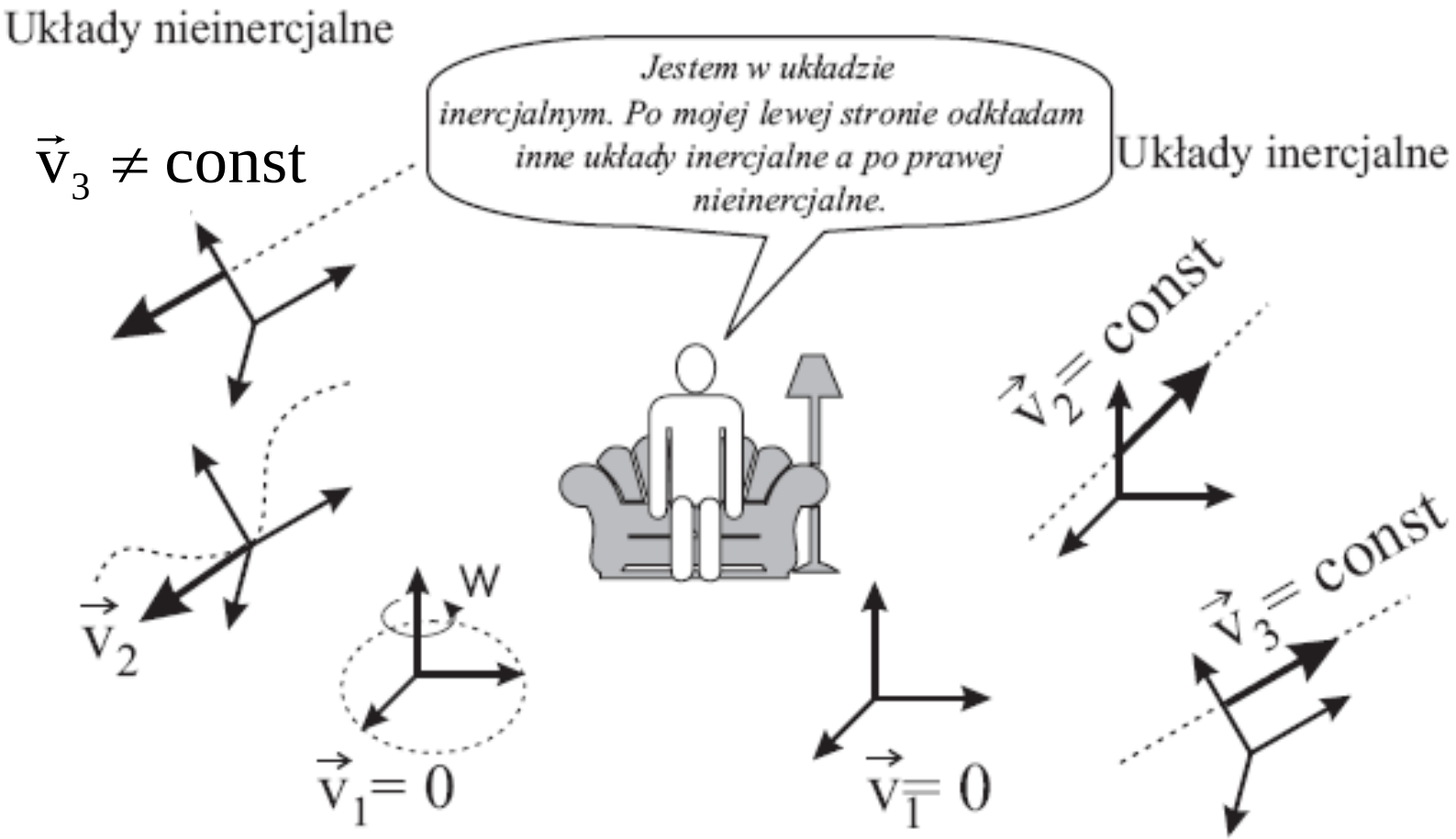
dr Piotr Sitarek, prof. uczelni

Katedra Fizyki Doświadczalnej
Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej

- Siły bezwładności
- Pęd
- Popęd siły i zderzenia
- Zasada zachowania pędu
- Rodzaje zderzeń
- Zderzenia w wielu wymiarach
- Środek masy

Siły bezwładności

Inercjalne i nieinercjalne układy odniesienia

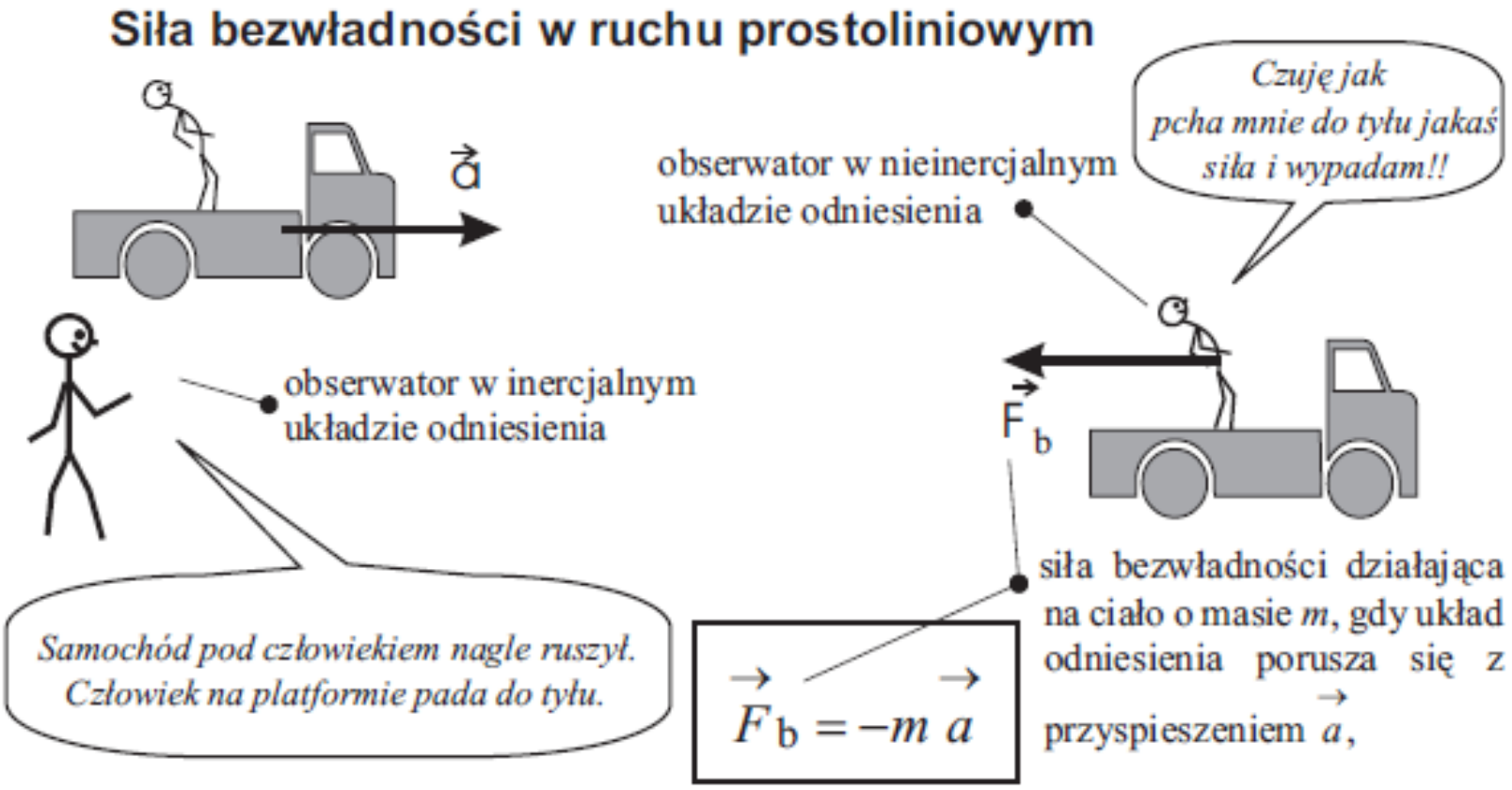


Siły bezwładności

Siły bezwładności (siły pozorne)

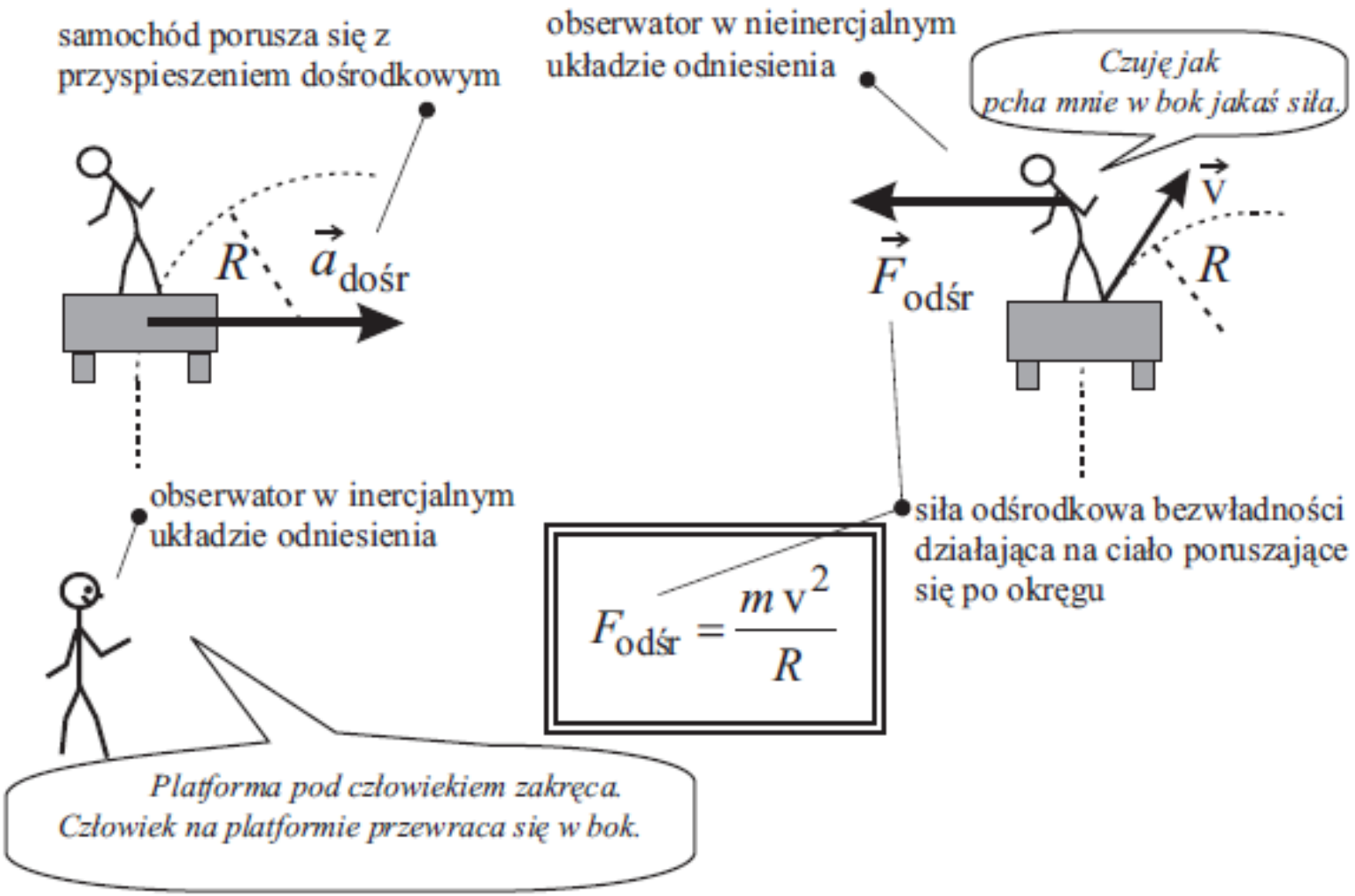
- Przyczyną sił bezwładności nie jest oddziaływanie ze strony innych ciał, lecz przyspieszenie układu odniesienia.
- Układ odniesienia poruszający się z przyspieszeniem nazywamy układem nieinercjalnym.
- Obserwator w nieinercjalnym układzie odniesienia odczuje działanie sił bezwładności podobnie jak działanie innych sił (których źródłem jest oddziaływanie ze strony innych ciał).

Siły bezwładności



Siły bezwładności

Odśrodkowa siła bezwładności



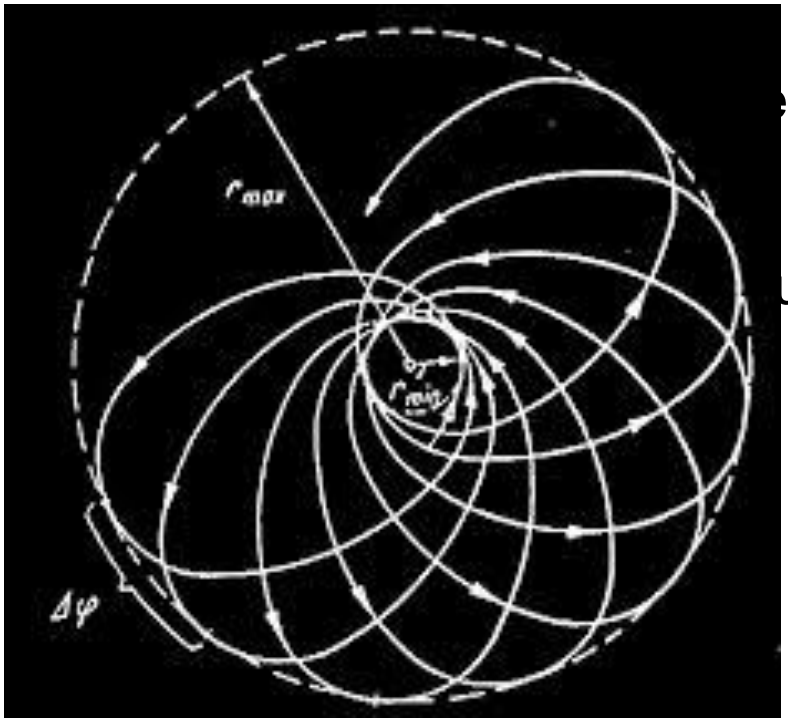
Siły bezwładności

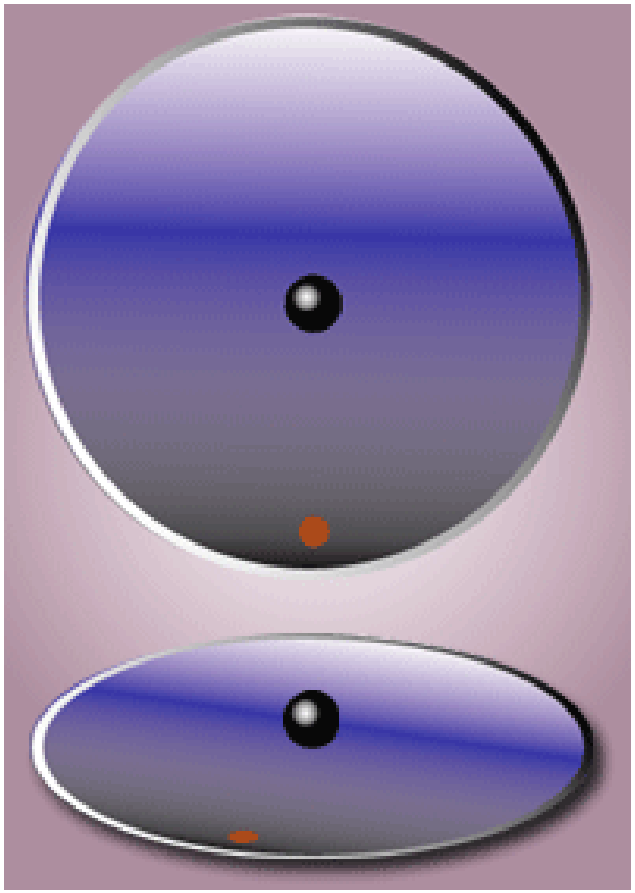
Siła Coriolisa

- dla obserwatora pozostającego w układzie obracającym się objawia się zakrzywieniem toru ciał poruszających się wewnątrz niego,

$$F_C = -2m(\bar{\omega} \times \bar{v})$$

- ek,
- u
-





Wikipedia

Pęd i zderzenia

Pęd

- Pęd ciała jest iloczynem jego masy i prędkości.
- Pęd jest wektorem o kierunku i zwrocie zgodnym z wektorem prędkości:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$



Pęd i zderzenia

Popęd siły

- Jeżeli na skutek działania siły następuje zmiana prędkości ciała – zmienia się także jego pęd,
- wskazuje to na relację między pędem i siłą.
- Załóżmy, że do pewnego ciała przez pewien czas przyłożono siłę,
- im większa siła, tym większej zmiany pędu ciała się spodziewamy,
- im dłuższy czas działania siły, tym większa będzie zmiana pędu.
- Zatem wartość zmiany pędu będzie proporcjonalna zarówno do wartości działającej siły, jak i do czasu jej działania.



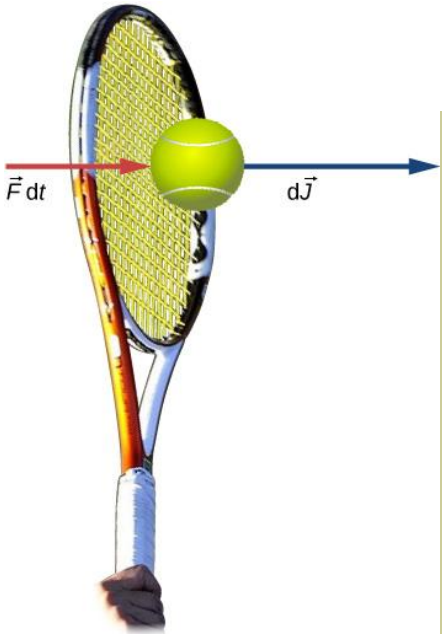


Pęd i zderzenia

Popęd siły

- jeżeli dana wielkość jest jednocześnie proporcjonalna do dwóch lub więcej wielkości, to jest proporcjonalna do ich iloczynu,
- iloczyn siły i czasu jej działania nazywamy popędem siły lub impulsem, bądź też impulsem siły i oznaczamy symbolem $\vec{J}$
- Niech $\vec{F}$ oznacza siłę działającą na ciało przez krótki przedział czasu dt. Popęd siły, wywieranej na ciało zdefiniowany jest jako

$$\mathrm{d}\vec{J} = \vec{F}\,\mathrm{d}t$$



Pęd i zderzenia

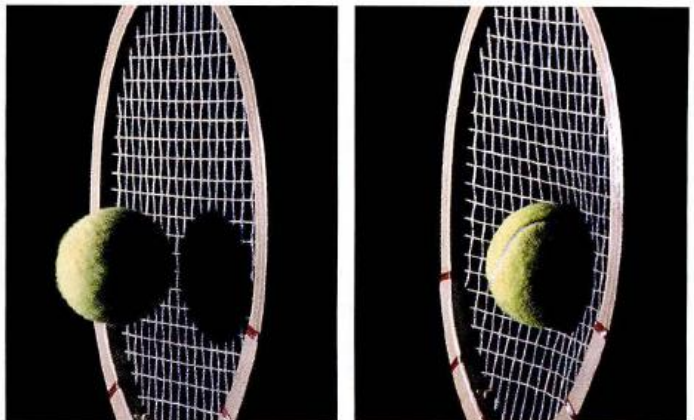
Popęd siły

- Całkowity popęd siły w przedziale czasu od chwili początkowej t_0 do końcowej t_1 wynosi więc

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

- Do obliczenia popędu siły konieczna jest więc znajomość $F(t)$, co często nie jest możliwe.
- Możemy natomiast posłużyć się średnią wartością siły działającej w pewnym przedziale czasu, i

$$\vec{J} = \vec{F}_{\text{śr}}\,\Delta t$$



Pęd i zderzenia

Popęd siły (przykład)

Krater meteorytowy w Arizonie (Krater Barringera)

Około 50 tys. lat temu w północnej Arizonie (USA) ogromny, liczący ok. 50 m średnicy meteoryt uderzył w powierzchnię Ziemi z prędkością ok. 1,3 10^4 m/s. W następstwie zderzenia powstał istniejący do dziś krater o średnicy ok. 1200 m, głębokości 170 m, z obrzeżem wypiętrzonym na wysokość 45 m ponad otaczającą go pustynię. Typowa gęstość meteorytów, zawierających głównie żelazo i nikiel, wynosi 8 000 kg/m^3. Korzystając ze wzoru na popęd siły, wyznacz siłę średnią jaką meteoryt działał na powierzchnię Ziemi podczas zderzenia.



Pęd i zderzenia

Popęd siły

- W przypadku siły niezależnej od czasu, jej wartość średnia i chwilowa są jednakowe:

$$\vec{F}_{\text{śr}} = \vec{F} = m\vec{a}$$

- i

$$\vec{J} = m\,\vec{a}\,\Delta t = m\frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t}\Delta t = m\,\Delta\vec{\mathbf{v}}$$

- czyli

$$\vec{J} = \Delta\vec{\mathbf{p}}$$

Pęd i zderzenia

Popęd siły



Piłce zostaje przekazany impuls J

Pęd i zderzenia

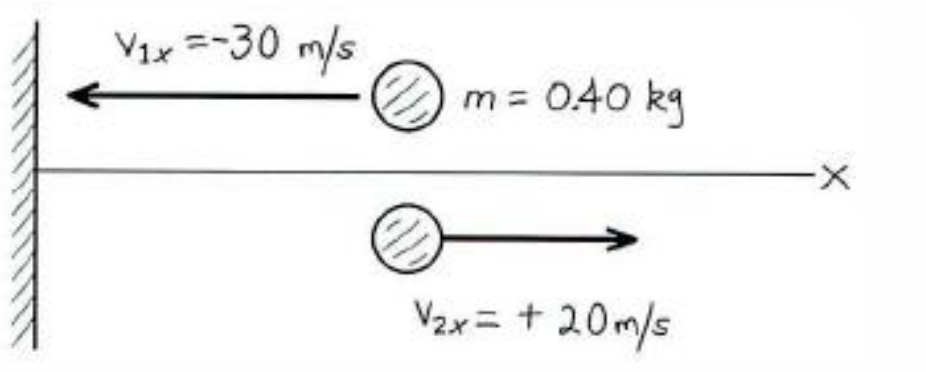
Popęd siły (przykład)

„Panie Sulu, proszę nas stąd zabrać, 1/4 impulsu naprzód!” – tą komendą kapitan statku Enterprise nakazywał rozpędzenie statku ze stanu spoczynku do prędkości końcowej równej 1/4 prędkości światła w próżni. Przyjmując, że statek dokonał tego w ciągu 60 s, wyznacz siłę rozpędzającą statek.



Układy cząstek

Impuls siły – przykład



$$p_{1x} = mv_{1x} = (0.40\ \text{kg})(-30\ \text{m/s}) = -12\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$
$$p_{2x} = mv_{2x} = (0.40\ \text{kg})(+20\ \text{m/s}) = +8.0\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

$$J_x = p_{2x} - p_{1x}$$
$$= 8.0\ \text{kg}\cdot\text{m/s} - (-12\ \text{kg}\cdot\text{m/s}) = 20\ \text{kg}\cdot\text{m/s} = 20\ \text{N}\cdot\text{s}$$

$$(F_{sr})_x = \frac{J_x}{\Delta t} = \frac{20\ \text{N}\cdot\text{s}}{0.010\ \text{s}} = 2000\ \text{N}$$

Układy cząstek

Zasada zachowania pędu

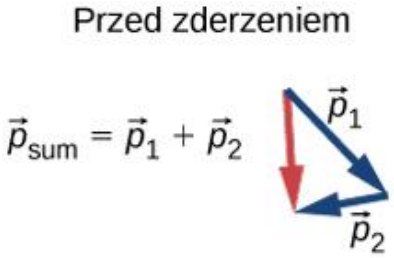
Jeśli na układ cząstek nie działają siły zewnętrzne lub ich wypadkowa jest równa zeru, to całkowity pęd układu nie ulega zmianie.

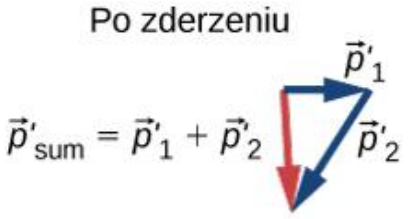
$$\vec{P} = \text{const}$$

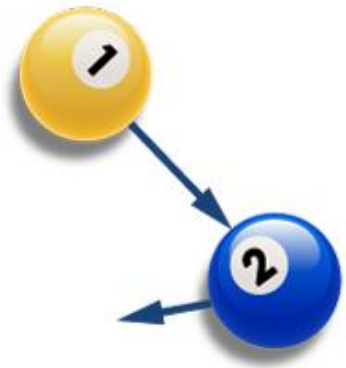
$$\Delta\vec{P} = 0$$

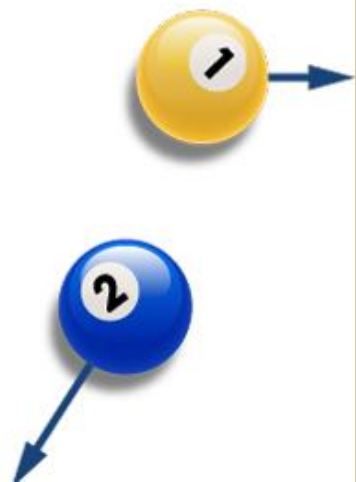
$$\vec{P}_{pocz} = \vec{P}_{końc}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j = \text{const}$$









Układy cząstek

Zasada zachowania pędu

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{j=1}^{M} \vec{p}'_j$$

suma pędów przed zderzeniem lub rozpadem

suma pędów po zderzeniu lub rozpadzie

dzielimy ciało tworząc układ dwóch ciał

$\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}$

$\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}$

$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$

pęd układu ciał

następuje wybuch i rozpad ciała

$\vec{F}_{12} = \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t}$

$\vec{F}_{21} = \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t}$

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

zastosowanie III zasady dynamiki

części ciała po rozpadzie

$\vec{p}'_1 = m_1 \vec{v}'_1$

$\vec{p}'_2 = m_2 \vec{v}'_2$

$\vec{p}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$

pęd układu ciał po rozpadzie

suma pędów przed rozpadem

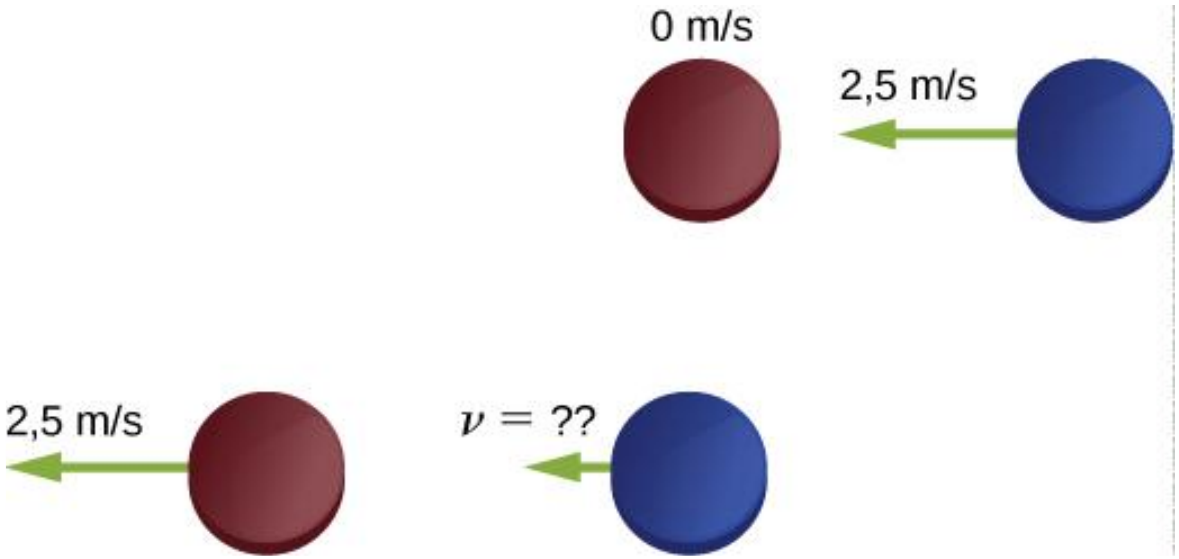
$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$

suma pędów po rozpadzie

Pęd i zderzenia

Zasada zachowania pędu

Dwa krążki hokejowe o takich samych masach, wynoszących 15 g położono na płaskim, gładkim lodzie. Czerwony krążek pozostaje w spoczynku, a krążkowi niebieskiemu nadano prędkość 2,5 m/s, skierowaną w lewo, tak by uderzył on centralnie w krążek czerwony. Po zderzeniu krążek czerwony przesuwa się w lewo, także z prędkością 2,5 m/s. Jaka będzie prędkość krążka niebieskiego?



Pęd i zderzenia

Zderzenia

- Chociaż pęd jest wielkością zachowaną we wszystkich przypadkach wzajemnego oddziaływania ciał, nie wszystkie oddziaływania (na przykład zderzenia lub eksplozje) są jednakowe.
- Możemy rozróżnić następujące przypadki:
  - Pojedynczy obiekt może eksplodować, rozpadając się na więcej elementów (w skrócie: jeden na wiele).
  - Wiele obiektów (przynajmniej dwa) mogą zderzyć się i połączyć na skutek tego zderzenia (w skrócie: wiele na jeden).
  - Wiele obiektów zderzając się odbija się od siebie, co w efekcie daje również wiele ciał w ruchu (w skrócie: wiele na wiele).

Pęd i zderzenia

Zderzenia

- W każdym rodzaju oddziaływania, w przypadku układu zamkniętego, jego pęd jest zachowany natomiast energia kinetyczna – już niekoniecznie:
  - Jeżeli $0 < E_{\text{k po}} < E_{\text{k przed}}$, zderzenie jest niesprężyste.
  - Jeżeli $E_{\text{k po}} = 0$, zderzenie jest idealnie niesprężyste.
  - Jeżeli $E_{\text{k po}} = E_{\text{k przed}}$, zderzenie jest sprężyste.
  - Jeżeli $E_{\text{k po}} > E_{\text{k przed}}$, mamy do czynienia z eksplozją.
- Należy pamiętać, że analizując zderzenia lub eksplozje, można opisywać je z użyciem pędu i energii kinetycznej.

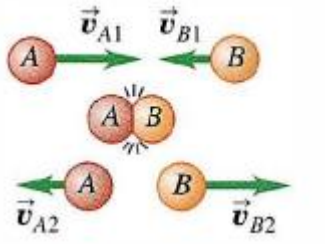
Zderzenia

Pęd i energia kinetyczna podczas zderzeń

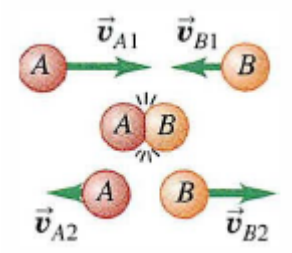
Gdy w czasie zderzenia energia kinetyczna ciała jest zachowana, takie zderzenie nazywamy **zderzeniem sprężystym**.
Gdy energia kinetyczna nie jest zachowana, zderzenie nazywamy **zderzeniem niesprężystym**.

Niezależnie czy zderzenie jest sprężyste, czy niesprężyste, jeśli zachodzi w układzie zamkniętym i izolowanym, to pęd układu ciał nie zmienia się.

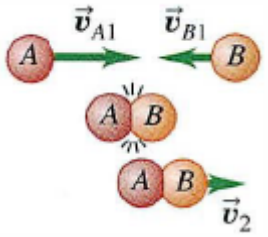
zderzenie sprężyste, $\Delta E_k=0$



zderzenie niesprężyste, $\Delta E_k\neq0$

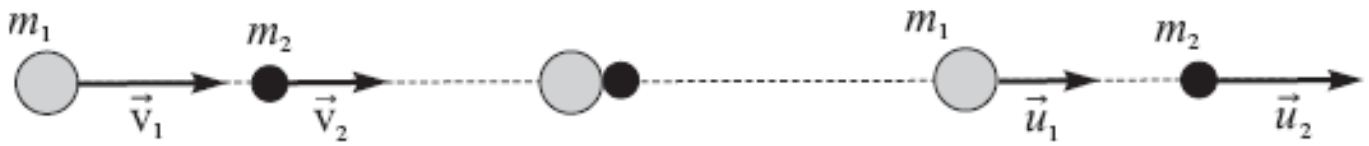


zderzenie całkowicie niesprężyste



Zderzenia

Zderzenia sprężyste (centralne) w jednym wymiarze



$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ — całkowity pęd przed zderzeniem

$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$ — całkowity pęd po zderzeniu

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

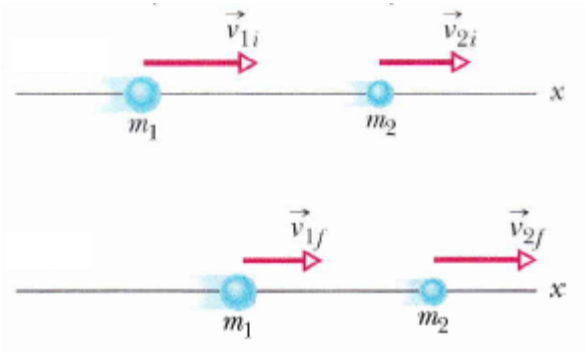
$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

całkowita energia kinetyczna przed zderzeniem

całkowita energia kinetyczna po zderzeniu

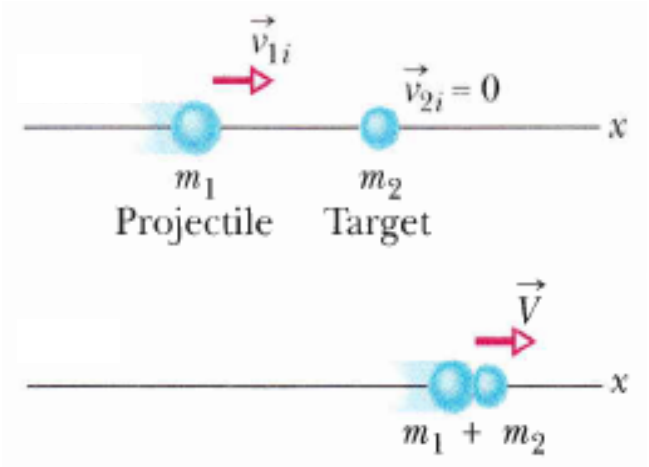
Zderzenia

Zderzenia niesprężyste w jednym wymiarze



$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}.$$

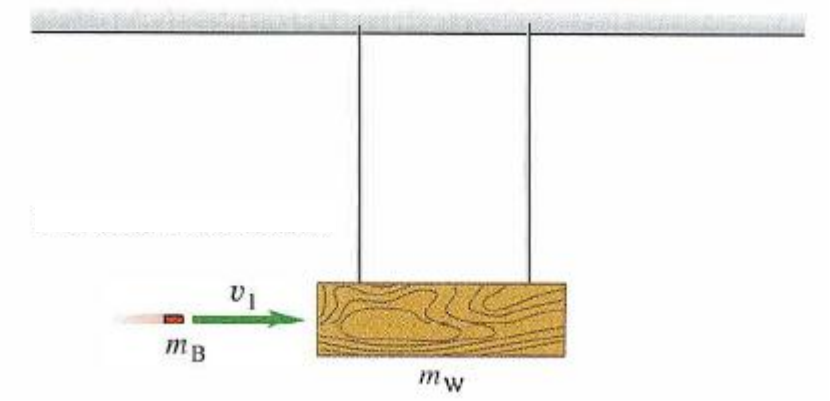


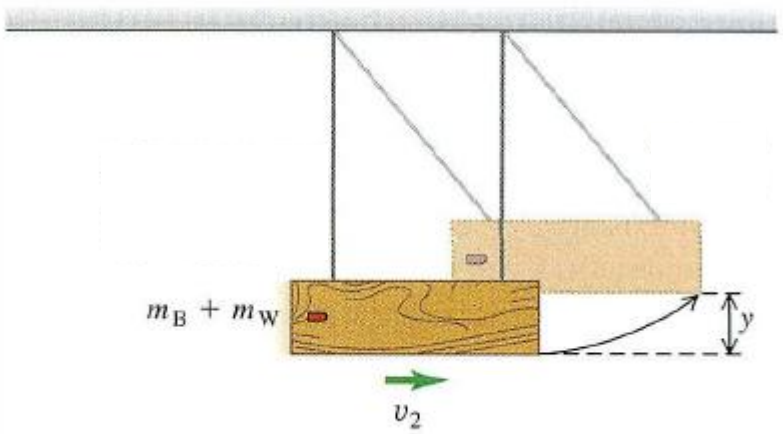
$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2)V$$

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}.$$

Zderzenia

Zderzenia niesprężyste w jednym wymiarze – wahadło balistyczne





$$m_B v_1 = (m_B + m_W) v_2 \qquad v_1 = \frac{m_B + m_W}{m_B} v_2$$

$$\tfrac{1}{2}(m_B + m_W) v_2^2 = (m_B + m_W) g y \qquad v_2 = \sqrt{2gy}$$

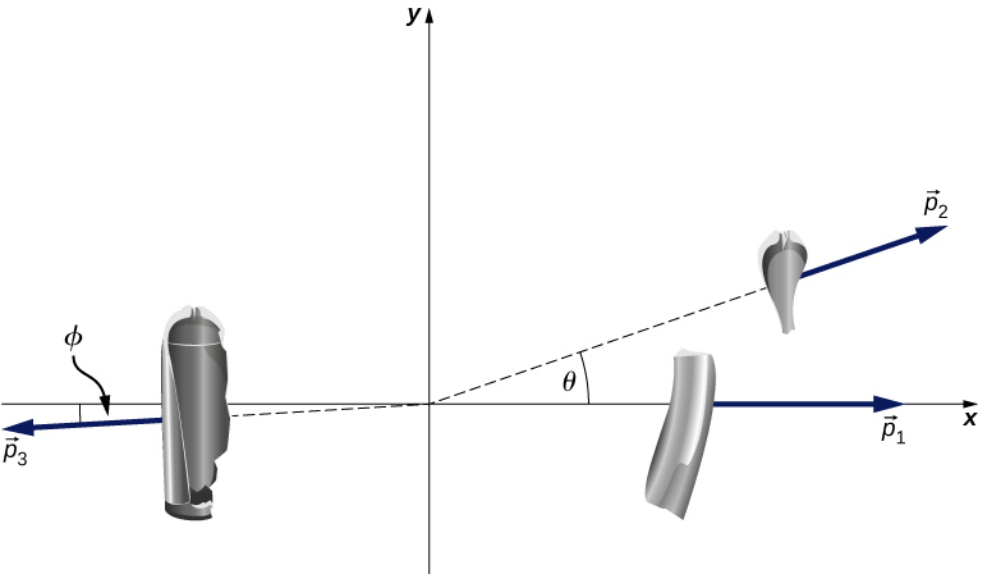
$$v_1 = \frac{m_B + m_W}{m_B} \sqrt{2gy}$$

Pęd i zderzenia

Zderzenia w wielu wymiarach

$$p_x \text{ suma po} = p_{x1} \text{ przed} + p_{x2} \text{ przed}$$

$$p_y \text{ suma po} = p_{y1} \text{ przed} + p_{y2} \text{ przed}$$



$$p_{x\text{po}} = p_{x\text{przed}},$$
$$p_{1x} + p_{2x} + p_{3x} = 0,$$
$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + p_{3x} = 0,$$
$$p_{3x} = -m_1 v_{1x} - m_2 v_{2x}$$

$$p_{y\text{po}} = p_{y\text{przed}},$$
$$p_{1y} + p_{2y} + p_{3y} = 0,$$
$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + p_{3y} = 0,$$
$$p_{3y} = -m_1 v_{1y} - m_2 v_{2y}$$

Środek masy

- Zakładaliśmy, że ciało porusza się zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona, ignorowaliśmy fakt, że może być ono zbudowane z wielu elementów.
- Postawmy więc problem: która część obiektu o fizycznych rozmiarach podlega ruchowi zgodnie z II zasadą dynamiki, gdy działają siły zewnętrzne, oraz w jaki sposób siły wewnętrzne i zewnętrzne zaburzają ruch ciała jako całości?

$$M = \sum_{j=1}^{N} m_j$$

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{\mathrm{w}j} = 0$$

$$\vec{F}_{\mathrm{z}} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_j}{\mathrm{d}t}$$

openstax.org/l/fizyka-tom-1

Środek masy

$$\vec{F}_z = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_j}{\mathrm{d}t}$$

- Powyższe równanie informuje nas, jaka będzie całkowita zmiana pędu całego ciała (wszystkich jego elementów) na skutek działania sił zewnętrznych;
- siły wewnętrzne nie mają wpływu na pęd ciała jako całości;
- z tego powodu nie możemy np. samych siebie podnieść za włosy.

Układy cząstek

Okazuje się, że możemy określić część obiektu o fizycznych rozmiarach, która podlega ruchowi zgodnie z II zasadą dynamiki – opis ruchu tej części pomaga w opisie ruchu całego ciała.



Środek masy ciała lub układu ciał to punkt, który porusza się tak, jak gdyby była w nim skupiona cała masa układu, a wszystkie siły zewnętrzne były przyłożone w tym właśnie punkcie.

$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_j$$

Układy cząstek

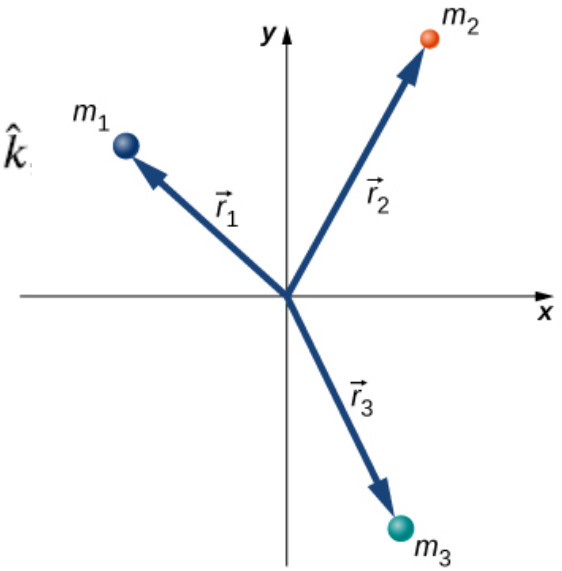
Środek masy

$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = r_{\text{ŚM}x}\hat{i} + r_{\text{ŚM}y}\hat{j} + r_{\text{ŚM}z}\hat{k}$$

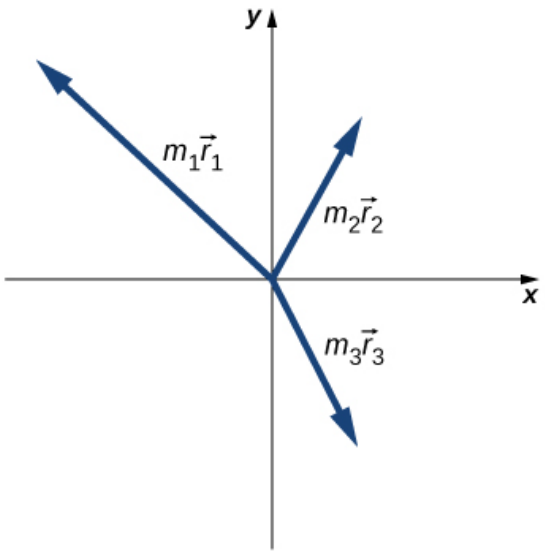
$$r_{\text{ŚM}x} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j x_j$$

$$r_{\text{ŚM}y} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j y_j$$

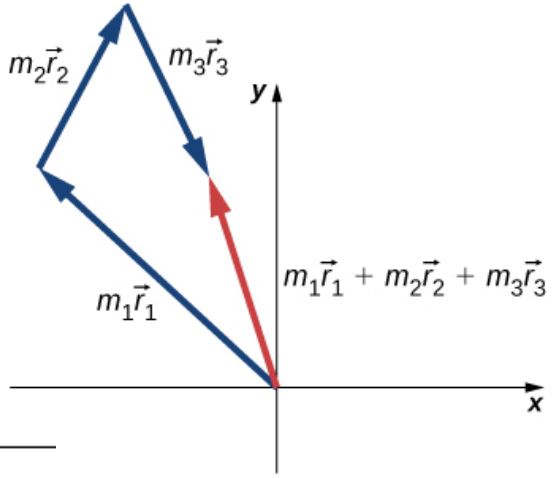
$$r_{\text{ŚM}z} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j z_j$$



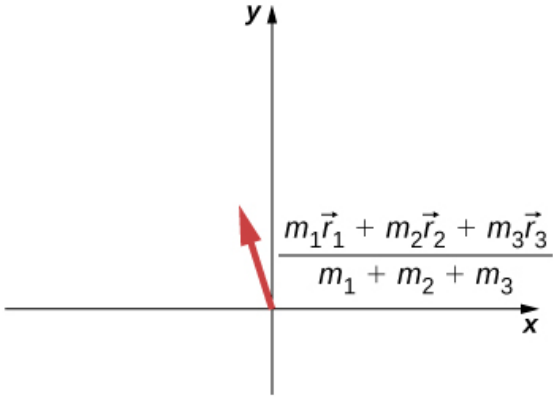
(a)



(b)



(c)

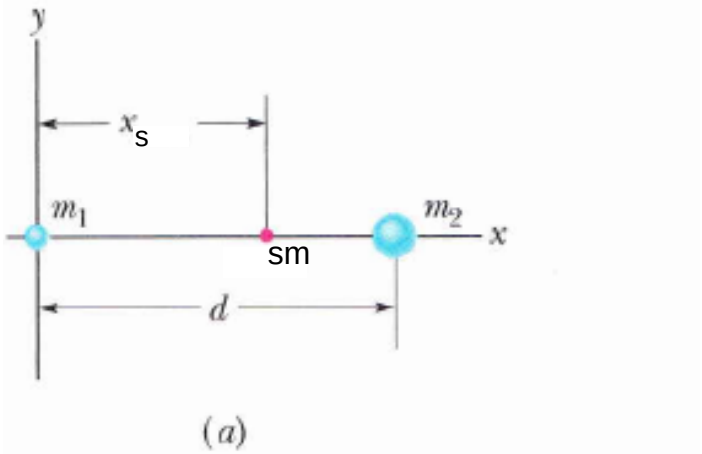


(d)

$$r_{\text{ŚM}} = \left|\vec{r}_{\text{ŚM}}\right| = \sqrt{r_{\text{ŚM}x}^2 + r_{\text{ŚM}y}^2 + r_{\text{ŚM}z}^2}$$

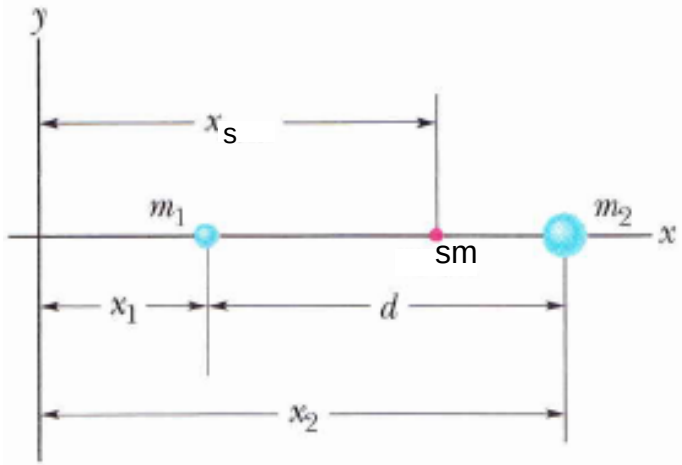
Układy cząstek

Środek masy



(a)

$$x_s = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$$

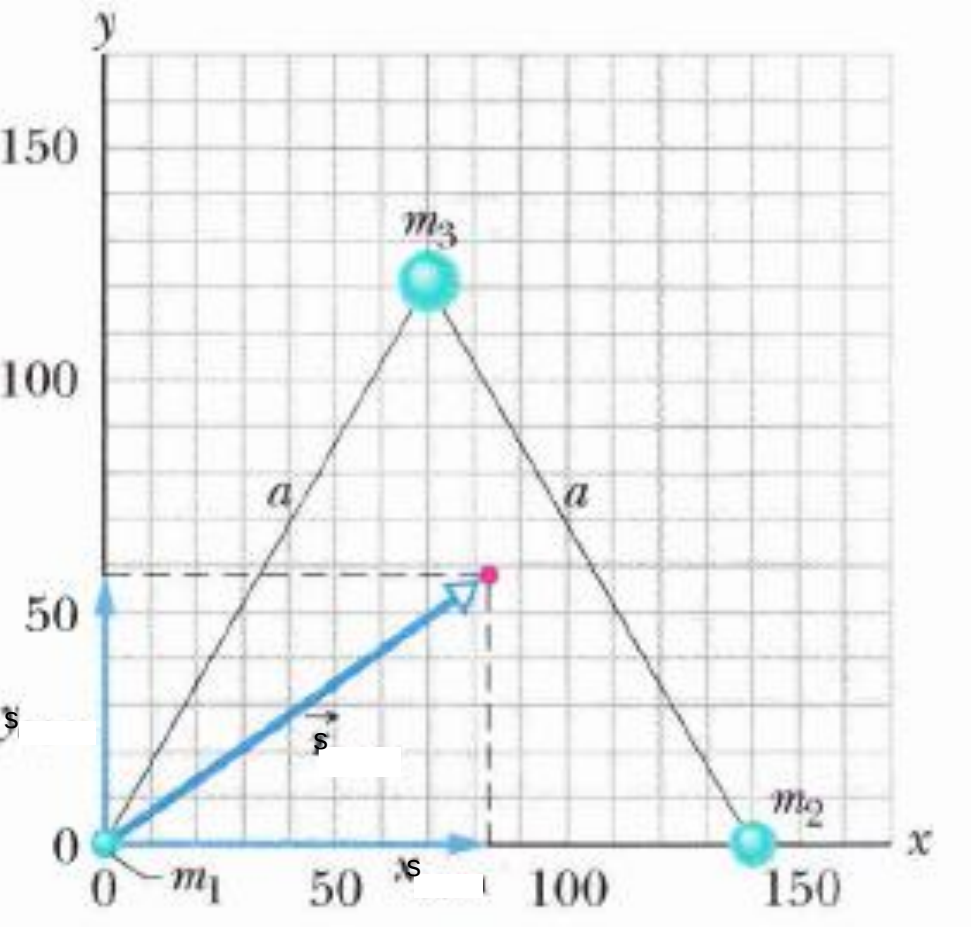


(b)

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Układy cząstek

Środek masy układu ciał. Przykład.



cząstka	masa (kg)	x (cm)	y (cm)
1	1.2	0	0
2	2.5	140	0
3	3.4	70	120

Układy cząstek

II zasada dynamiki Newtona dla układu cząstek

$$\vec{F}_{wyp} = M\vec{a}_s$$

F_{wyp} – wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych,
M – całkowita masa układu. Nie może się zmieniać – **układ zamknięty**.
a_s – przyspieszenie środka masy

$$\vec{a}_s = \frac{d\vec{v}_s}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

Układy cząstek

Prędkość i przyspieszenie środka masy

Prędkość środka masy

masy poszczególnych ciał

$$\vec{V}_s = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i$$

wektor prędkości ciała o masie m_i

wektor prędkości środka masy układu ciał

masa całego układu $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

Przyspieszenie środka masy

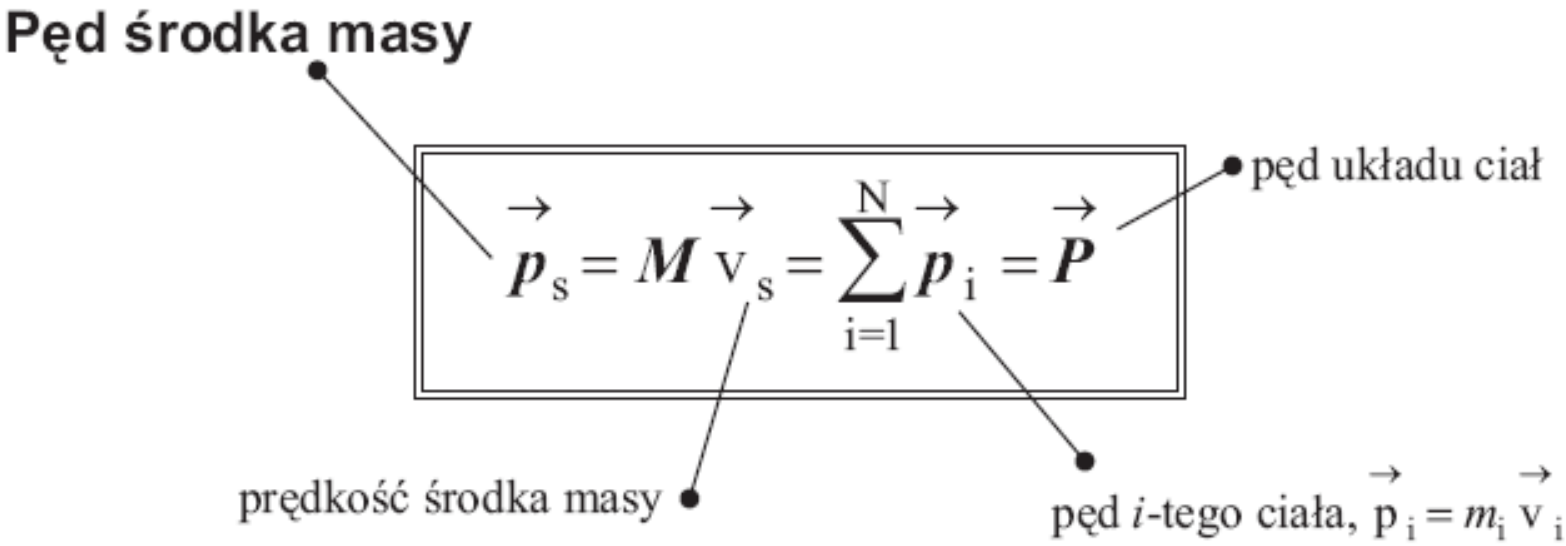
wektor przyspieszenia ciała o masie m_i

$$\vec{a}_s = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

wektor przyspieszenia środka masy układu ciał

Układy cząstek

Pęd układu cząstek



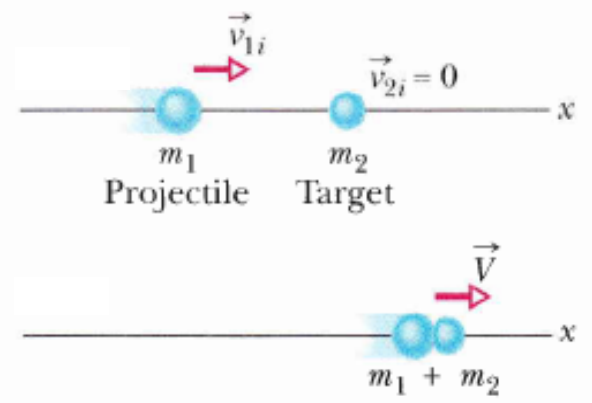
II zasada dynamiki dla układu cząstek

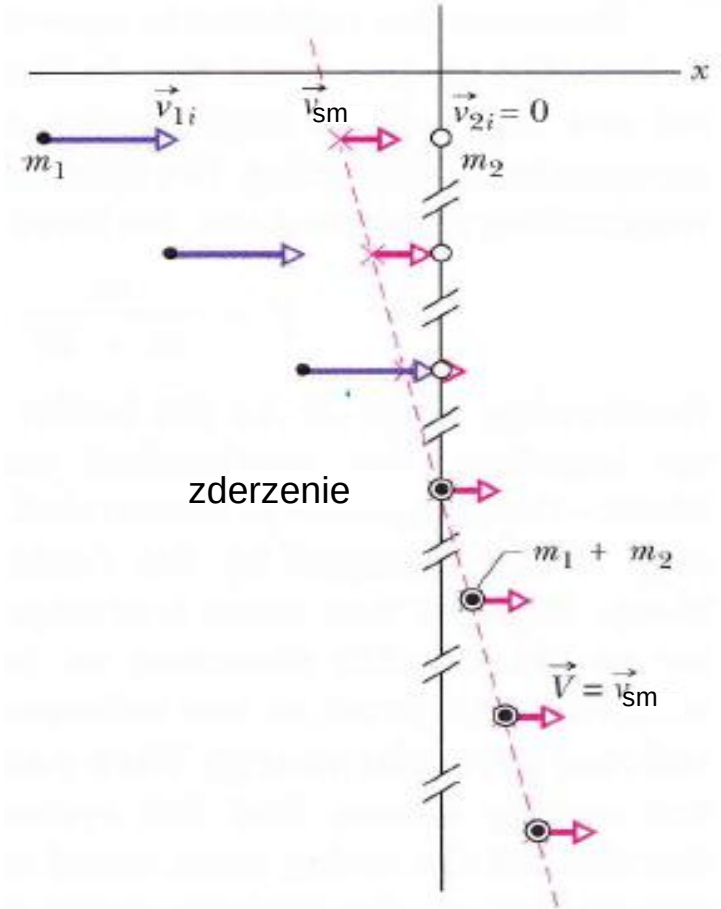
$$\vec{F}_{wyp} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Zderzenia

Zderzenia niesprężyste w jednym wymiarze – prędkość środka masy

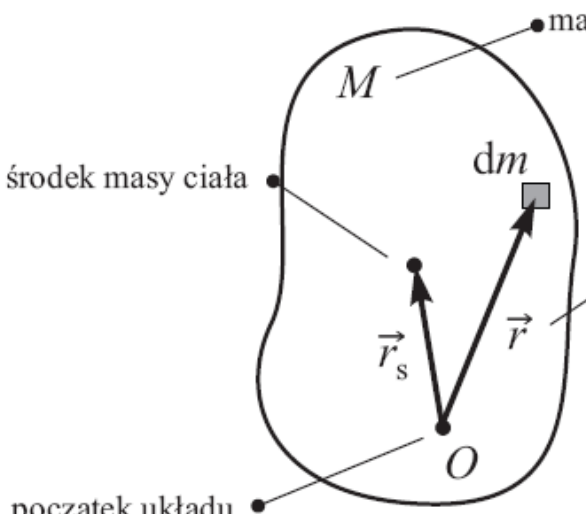
Prędkość środka masy układu zamkniętego i izolowanego nie może się zmieniać.





Układy cząstek

Środek masy – ciało rozciągłe



wektor położenia elementu masy dm
$dm = \rho\, dV$
ρ - gęstość ciała
dV - nieskończenie mały element objętości ciała

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}\, dm = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\,\rho(\vec{r})\, dV$$

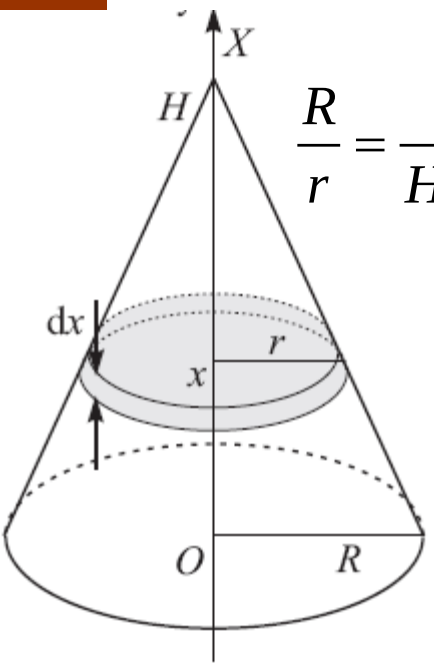
wektor położenia środka masy danego ciała

masa całkowita danego ciała
$M = \int_M dm = \int_V \rho\, dV$

Układy cząstek

Środek masy – ciało rozciągłe. Przykład.

$$x_s = \frac{1}{M}\int_M x\,\mathrm{d}m$$



$$\frac{R}{r} = \frac{H}{H-x}$$

$$M = \rho V = \rho\frac{1}{3}\pi R^2 H$$

$$\mathrm{d}m = \rho\frac{(H-x)^2}{H^2}\pi R^2\,\mathrm{d}x$$

$$x_s = \frac{1}{4}H$$

stożek jest bryłą symetryczną – środek masy leży na osi symetrii

Dziękuję za uwagę!