Fizyka 1B

Wykład 2

dr Piotr Sitarek, prof. uczelni

Katedra Fizyki Doświadczalnej
Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej

Ruch prostoliniowy

Położenie

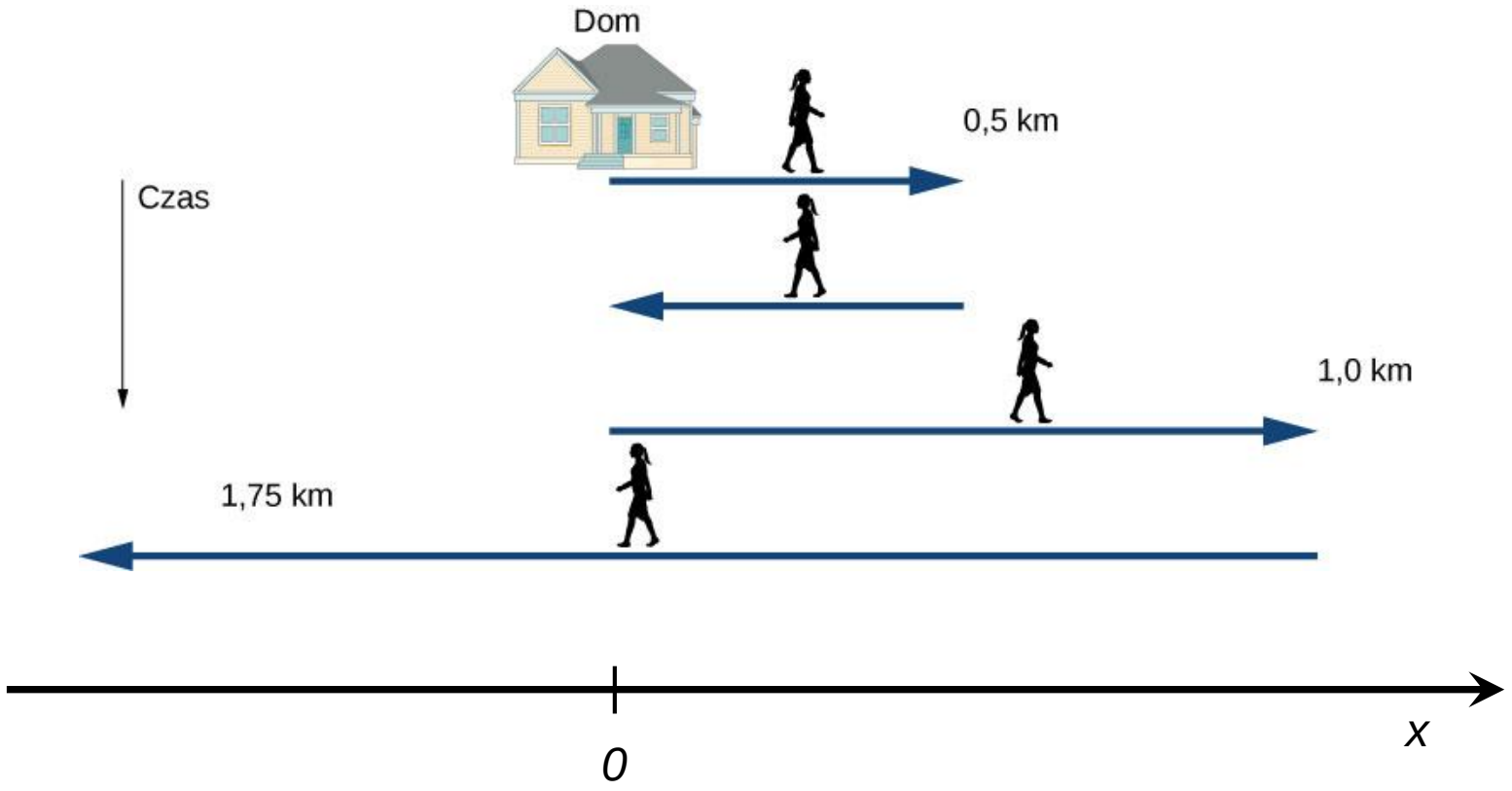
- aby opisać ruch ciała, należy zdefiniować położenie ciała w wybranym układzie odniesienia, z którym związesz pewien matematyczny układ współrzędnych,
- układ odniesienia jest dowolnie wybranym układem osi, względem których mierzymy położenie i opisujemy ruch ciała,
- jako układ odniesienia najczęściej wybieramy Ziemię (lub spoczywające na Ziemi obiekty),
- mówimy wtedy o ruchu względem Ziemi (podłoża, gruntu, powierzchni itd.).



Ruch prostoliniowy

Położenie

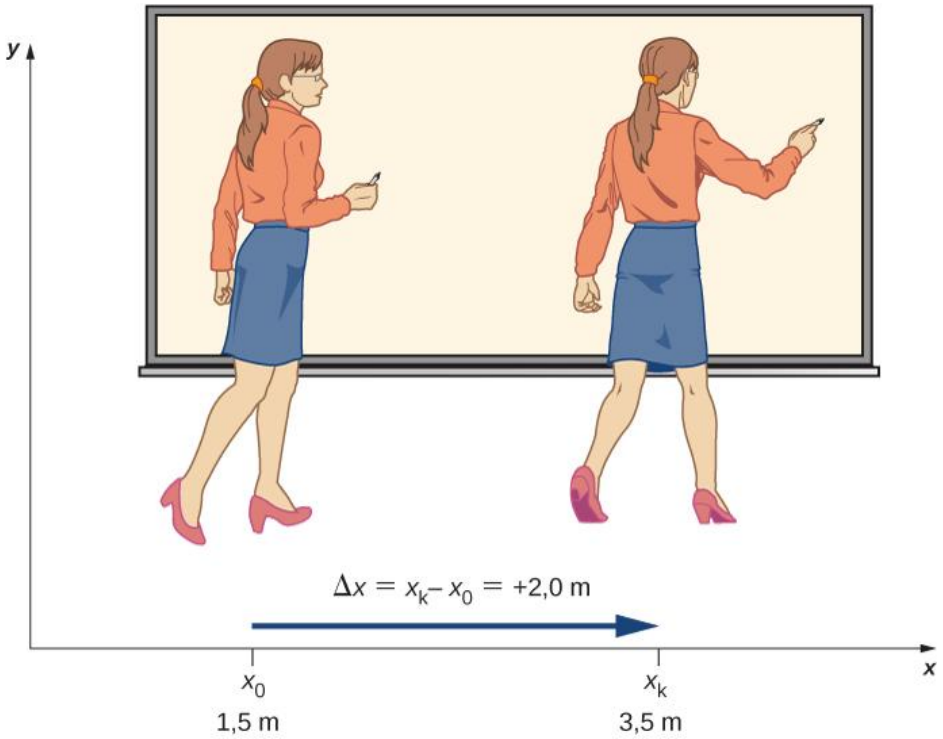
- położenie ciała w ruchu jednowymiarowym podajemy najczęściej wzdłuż osi *OX*.
- ruch wzdłuż jednej osi (ruch jednowymiarowy) odbywający się po linii prostej – nazywamy też ruchem prostoliniowym



Ruch prostoliniowy

Przemieszczenie

- jeżeli jakieś ciało się porusza to jego położenie się zmienia,
- ta zmiana położenia nazywa się **przemieszczeniem,**
- przemieszczenie, czyli zmiana położenia, jednoznacznie sugeruje ruch, czyli zmianę położenia – ciało się przemieściło lub doznało przemieszczenia,
- przemieszczenie jest różnicą położeń na prostej (osi) przed i po wykonaniu ruchu,
- przemieszczenie wyraźnie wskazuje na kierunek ruchu czyli jest wektorem (może być zarówno dodatnie, jak i ujemne)



openstax.org/l/fizyka-tom-1

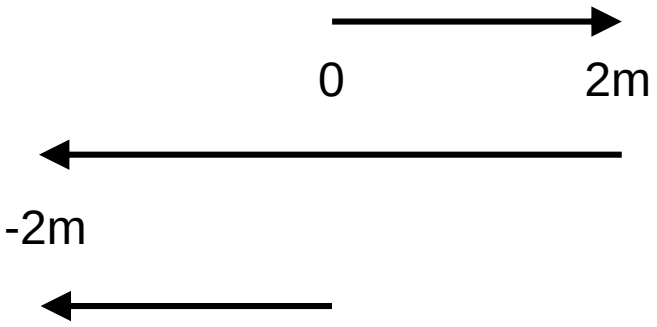
Ruch prostoliniowy

Przemieszczenie

$$\Delta x = x_k - x_0$$

- ciała w ruchu mogą doznawać kilku lub nawet całej serii przemieszczeń,
- całkowite przemieszczenie definiujemy jako sumę pojedynczych przemieszczeń

$$\Delta x_{całk} = \sum \Delta x_i$$



$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 2\,\text{m} - 0\,\text{m} = 2\,\text{m}$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1 = (-2\,\text{m}) - 2\,\text{m} = -4\,\text{m}$$

$$\Delta x_{całk} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 2\,\text{m} - 4\,\text{m} = -2\,\text{m}$$

Ruch prostoliniowy

Przemieszczenie

- długość przemieszczenia nie powinna być mylona z drogą, jaką przebyło ciało,
- droga przebyta w ruchu przez ciało jest długością toru, po którym ciało się porusza między dwoma punktami,
- w omawianym przykładzie całkowita droga jest sumą długości wektorów przemieszczeń składowych, czyli

$$s_{\text{całk}} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 2\,\text{m} + 4\,\text{m} = 6\,\text{m}$$

Ruch prostoliniowy

Prędkość średnia

- każdemu położeniu ciała przyporządkujemy odpowiadający mu czas,
- jeżeli nie interesują nas szczegóły ruchu w danym momencie, najczęściej wystarczy podać **średnią prędkość**, aby określić jak szybko ciało się porusza,
- jest to wielkość wektorowa, którą wyraża iloraz całkowitego przemieszczenia między dwoma punktami i czasu, w jakim to przemieszczenie nastąpiło,
- ten czas nazywamy całkowitym czasem ruchu i oznaczamy Δt

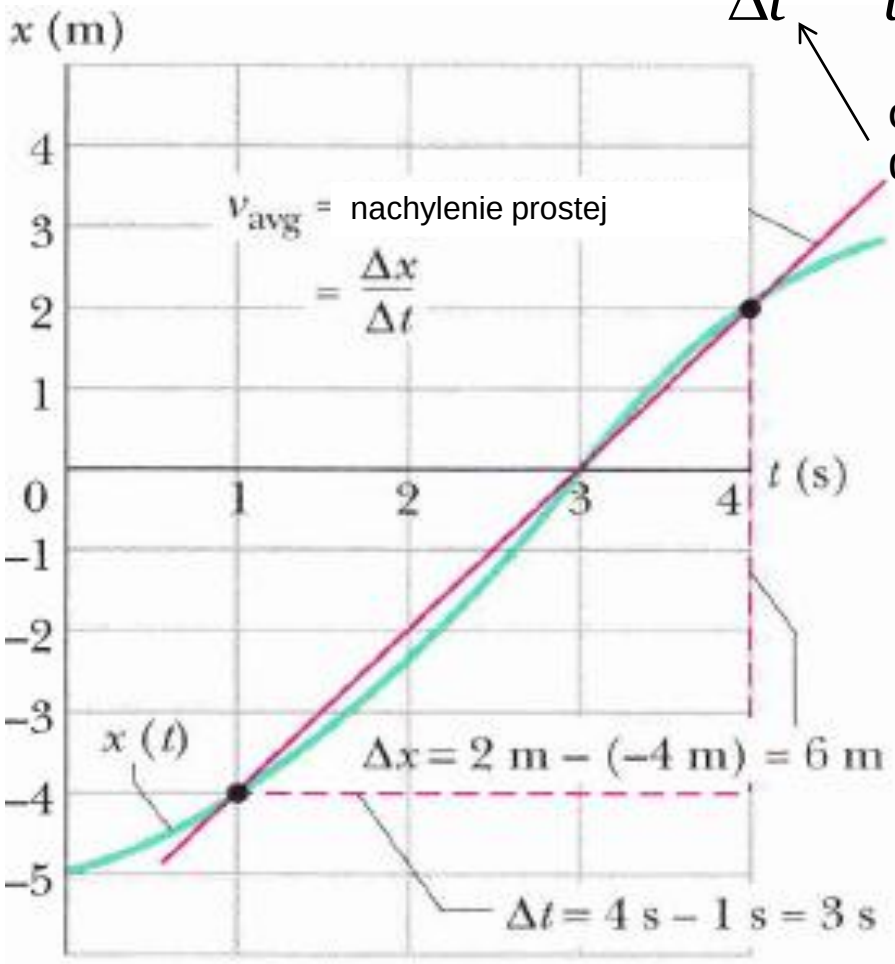
Ruch prostoliniowy

Prędkość średnia

całkowite przemieszczenie ciała

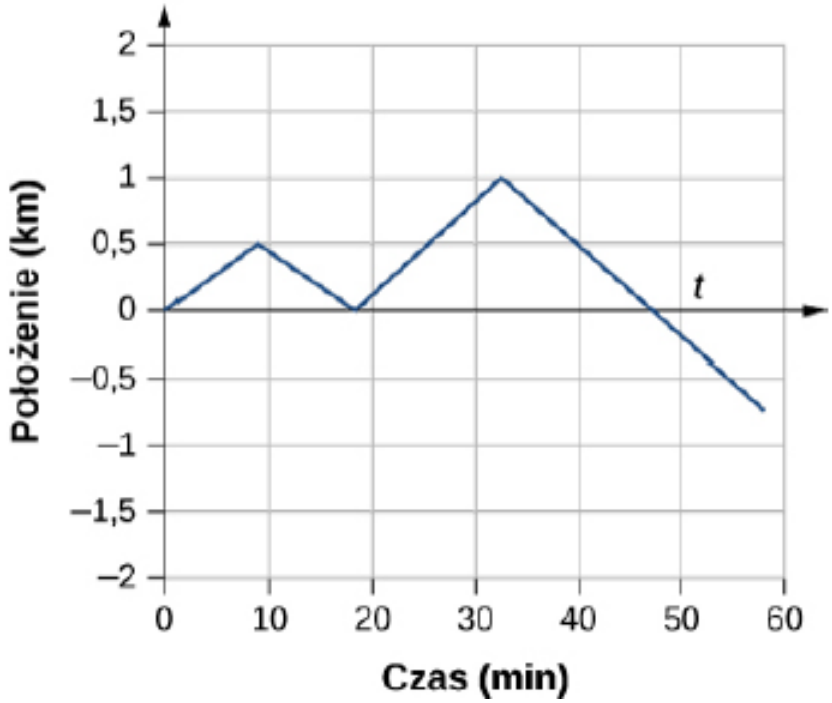
$$v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

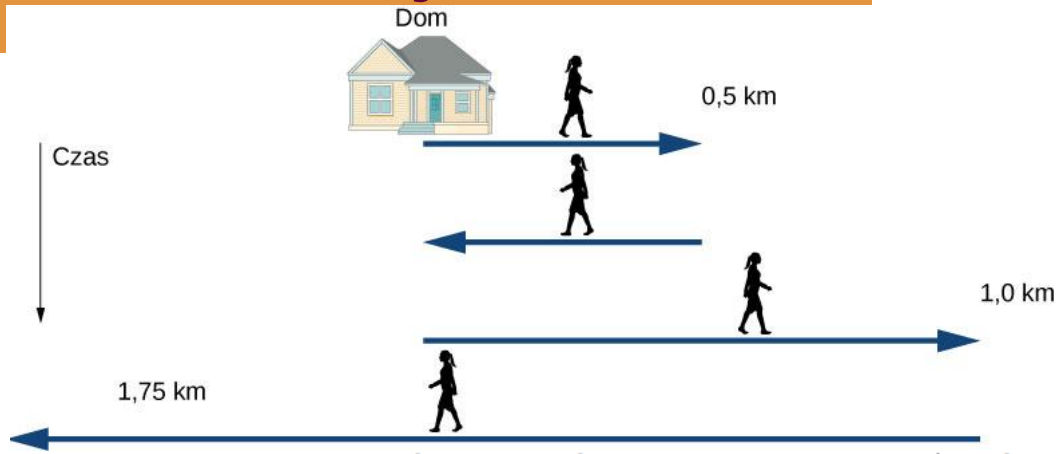
całkowity czas ruchu pomiędzy dwoma punktami



Ruch prostoliniowy

Prędkość średnia





Czas t_i (min)	Położenie x_i (km)	Przemieszczenie Δx_i (km)
$t_0 = 0$	$x_0 = 0$	$\Delta x_0 = 0$
$t_1 = 9$	$x_1 = 0{,}5$	$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 0{,}5$
$t_2 = 18$	$x_2 = 0$	$\Delta x_2 = x_2 - x_1 = -0{,}5$
$t_3 = 33$	$x_3 = 1{,}0$	$\Delta x_3 = x_3 - x_2 = 1{,}0$
$t_4 = 58$	$x_4 = -0{,}75$	$\Delta x_4 = x_4 - x_3 = -1{,}75$

$$\sum_i \Delta x_i = 0{,}5\ \text{km} - 0{,}5\ \text{km} + 1{,}0\ \text{km} - 1{,}75\ \text{km} = -0{,}75\ \text{km}$$

$$\text{Prędkość średnia} = \frac{\text{Całkowite przemieszczenie}}{\text{Całkowity czas}} = \bar{v} = \frac{-0{,}75\ \text{km}}{58\ \text{min}} = -0{,}013\ \frac{\text{km}}{\text{min}}$$

$$s_{\text{całk}} = \sum_i |\Delta x_i| = 0{,}5\ \text{km} + 0{,}5\ \text{km} + 1{,}0\ \text{km} + 1{,}75\ \text{km} = 3{,}75\ \text{km}$$

Ruch prostoliniowy

Prędkość chwilowa

- wielkość mówiąca o tym, jak szybko ciało porusza się wzdłuż swojego toru ruchu w danym momencie, nazywa się prędkością chwilową (często po prostu prędkością),

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$$

- prędkość chwilowa jest równa prędkości średniej w granicy czasu zdążającego do zera lub
- jest to pochodna położenia *x* po czasie *t*,

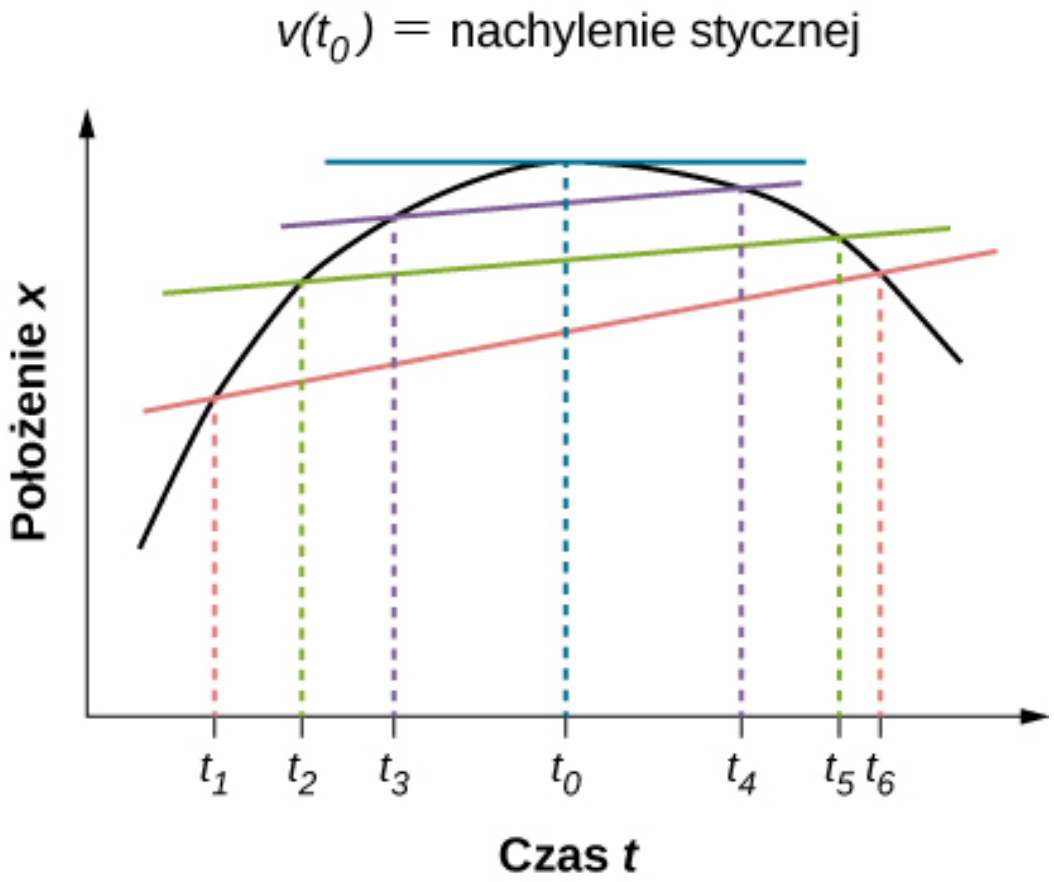
$$v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t)$$

- gdy $x(t) = At^n$

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = nAt^{n-1}$$

Ruch prostoliniowy

Prędkość chwilowa



Ruch prostoliniowy

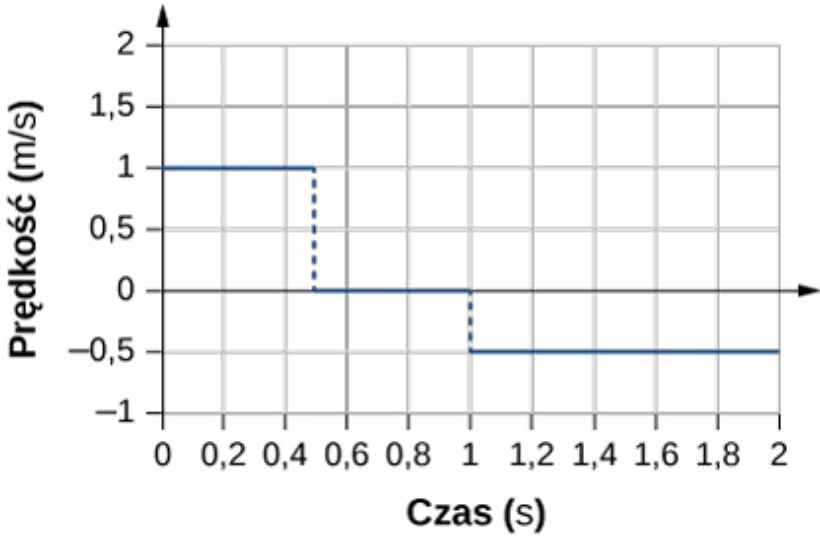
Prędkość chwilowa



$$\bar{v} = \Delta x / \Delta t = (0{,}5\ \text{m} - 0{,}0\ \text{m}) / (0{,}5\ \text{s} - 0{,}0\ \text{s}) = 1{,}0\ \text{m/s}$$

$$\bar{v} = \Delta x / \Delta t = (0{,}5\ \text{m} - 0{,}5\ \text{m}) / (1{,}0\ \text{s} - 0{,}5\ \text{s}) = 0{,}0\ \text{m/s}$$

$$\bar{v} = \Delta x / \Delta t = (0{,}0\ \text{m} - 0{,}5\ \text{m}) / (2{,}0\ \text{s} - 1{,}0\ \text{s}) = -0{,}5\ \text{m/s}$$



Ruch prostoliniowy

Szybkość i szybkość średnia

$$\text{Szybkość średnia} = v_{śr} = \frac{\text{Całkowita droga}}{\text{Całkowity czas}} = \frac{s_{całk}}{t_{całk}}$$

- w codziennym życiu nie rozróżniamy pojęć prędkość oraz szybkość i używamy ich naprzemiennie,
- w fizyce jednak nie są to te same wielkości i znacząco się różnią,
- **prędkość jest wektorem**,
- **szybkość jest skalarem**, nie ma kierunku ani zwrotu,
- można też obliczyć chwilową szybkość, jako długość prędkości chwilowej:

$$\text{Szybkość} = |v(t)|$$

Ruch prostoliniowy

Prędkość chwilowa i średnia

- Położenie cząstki dane jest funkcją

$$x(t) = \left(3{,}0t + 0{,}5t^3\right)\ \mathrm{m}$$

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = nAt^{n-1}$$

- a. obliczyć prędkość chwilową w chwili t = 2 s,
- b. obliczyć prędkość średnią pomiędzy 1 a 3 s ruchu.

Ruch prostoliniowy

Przyspieszenie średnie i chwilowe

- przyspieszać - rozpędzać się, zwiększać szybkość,
- im większe jest przyspieszenie, tym większa jest zmiana prędkości w danym przedziale czasu,
- przyspieszenie średnie jest zmianą wektora prędkości w pewnym przedziale czasu, w ruchu po linii prostej zapiszemy:

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_k - v_0}{t_k - t_0}$$

- przyspieszenie jest wektorem, którego kierunek jest równoległy do kierunku zmiany wektora prędkości,
- przyspieszenie jest zmianą wartości i/lub kierunku prędkości w czasie.

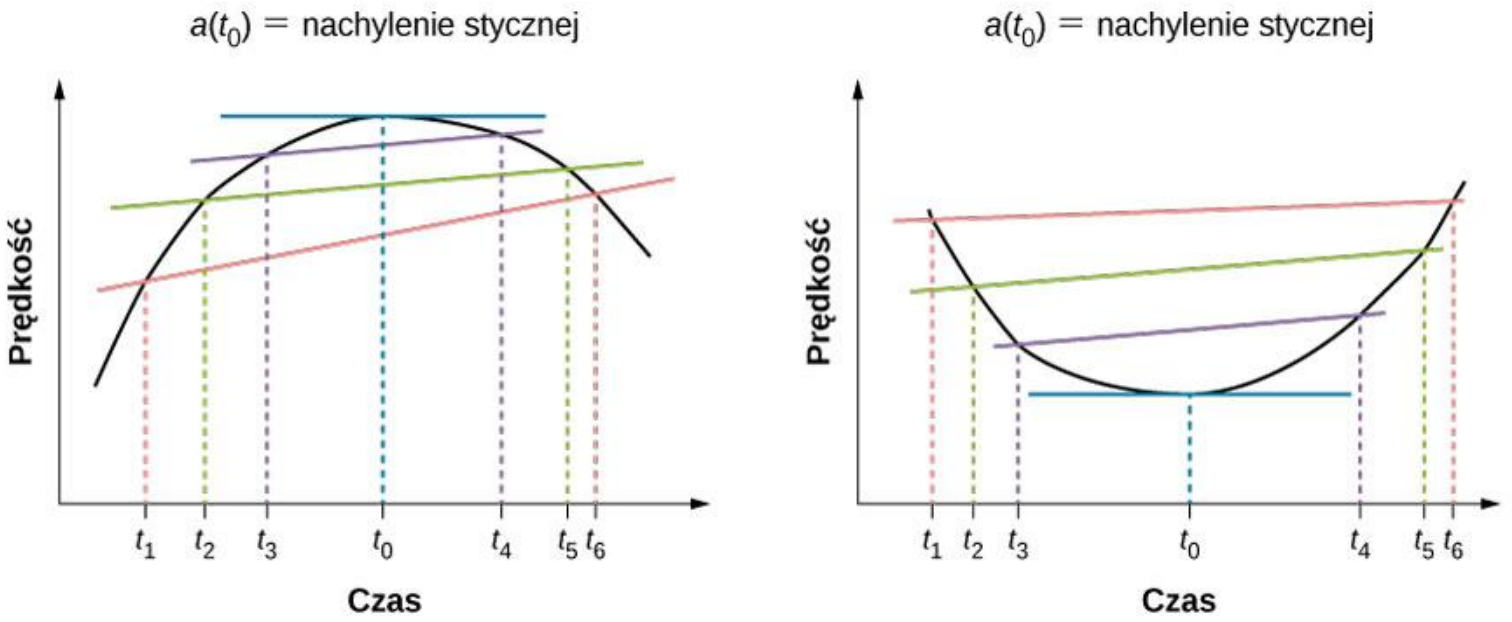


Ruch prostoliniowy

Przyspieszenie średnie i chwilowe

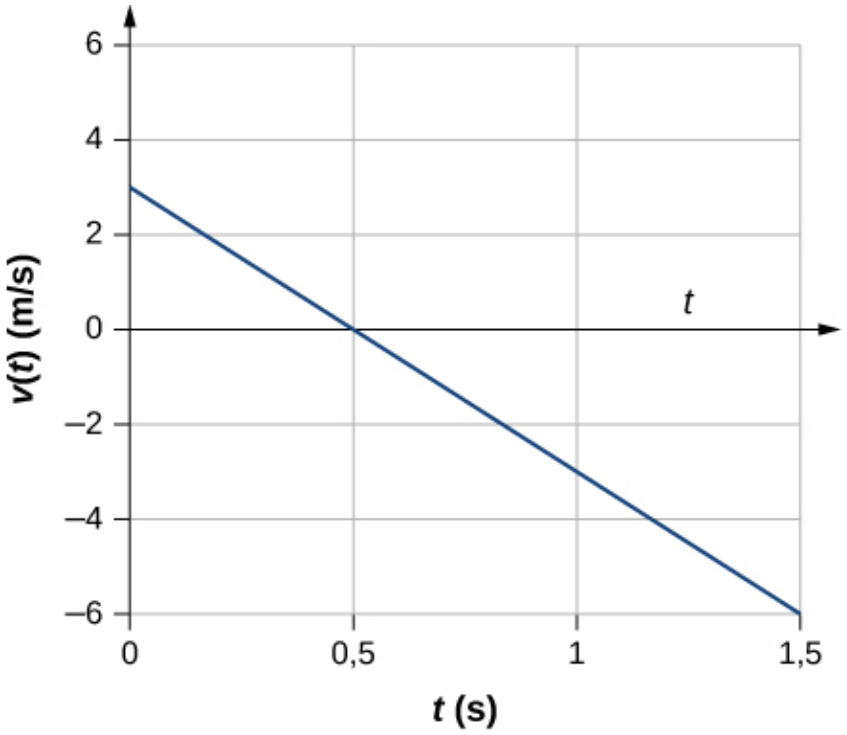
- przyspieszenie chwilowe ***a***, inaczej przyspieszenie w danej chwili czasu, definiujemy analogicznie do prędkości chwilowej,
- obliczamy średnią prędkość między dwoma punktami odległymi w czasie o Δt i żądamy, by zdążało do zera. W efekcie otrzymujemy pochodną po czasie funkcji prędkości $\boldsymbol{v}(t)$,

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t)$$

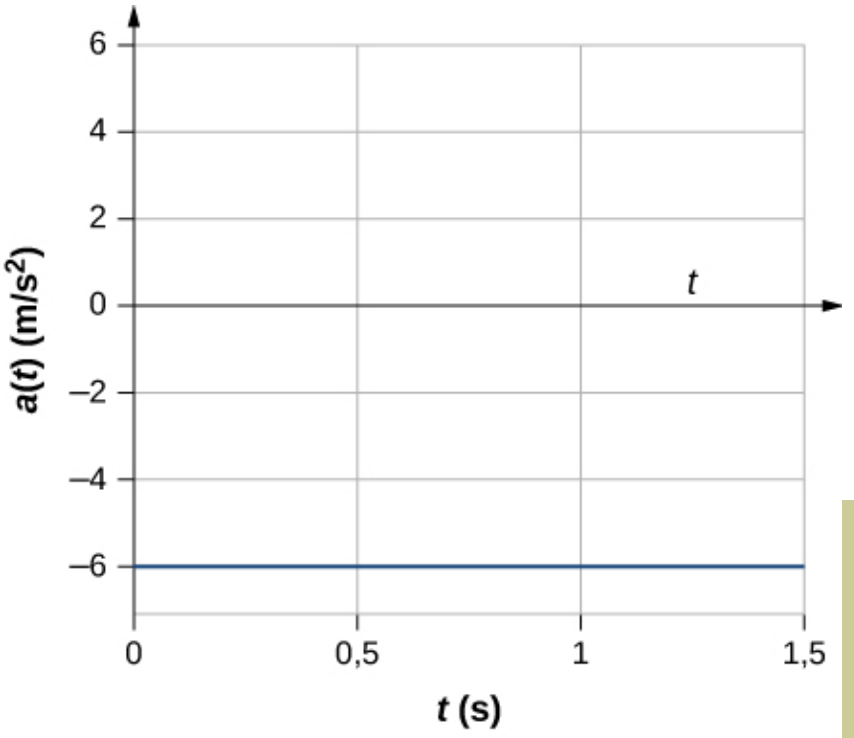


Ruch prostoliniowy

Przyspieszenie średnie i chwilowe



(a) Prędkość



(b) Przyspieszenie

Ruch prostoliniowy

Ruch ze stałym przyspieszeniem

$$x = x_0 + \overline{v}t$$

$$\overline{v} = \frac{v_0 + v}{2}$$

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

pamiętajmy, że przyspieszenie jest stałe, ***a*** = const

Ruch prostoliniowy

Przyspieszenie grawitacyjne

Gdy rzucimy ciało do góry, to po pewnym czasie zacznie ono spadać. Tak podczas wznoszenia jak i opadania ciało porusza się z przyspieszeniem, które nazywamy

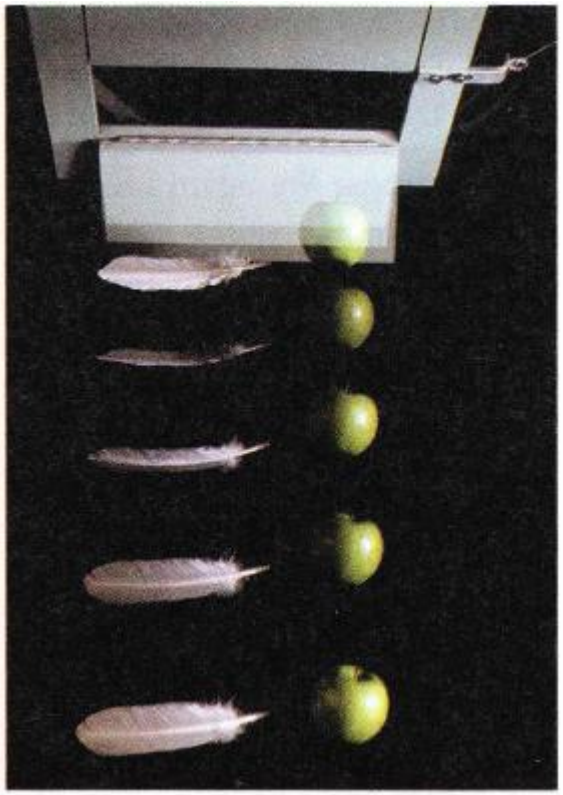
przyspieszeniem ziemskim.

$$g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$$

Nie zależy ono od własności przedmiotu:

masa, kształt, itd.

– gdy zaniedbamy wpływ powietrza!



Ruch prostoliniowy

Ruch jednowymiarowy w polu grawitacyjnym

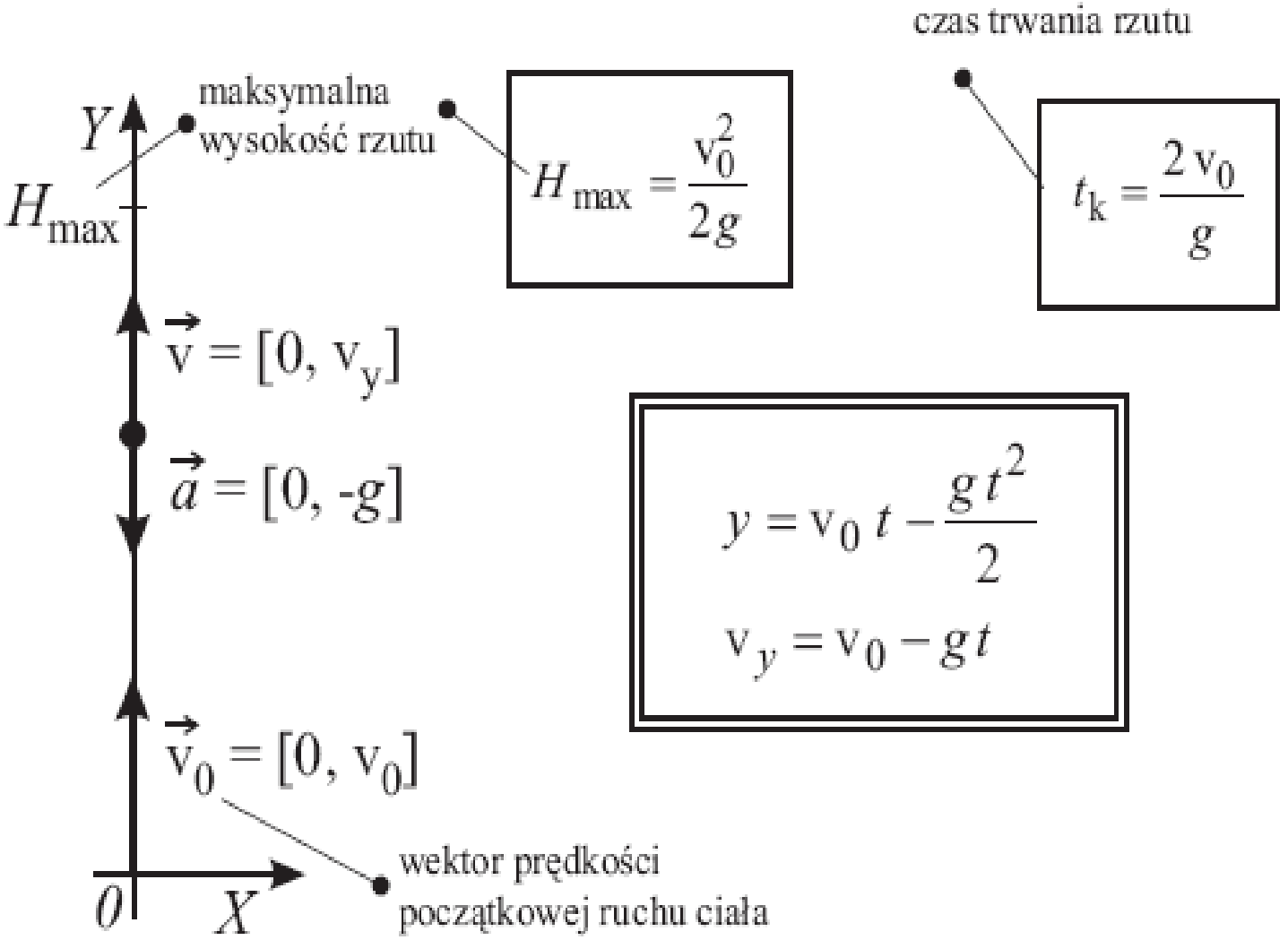
- przyjmujemy, że ruch odbywa się wzdłuż osi *OY* i przyspieszenie wynosi *-g* (dodatni kierunek jest zdefiniowany w górę),
- równania ruchu w spadku swobodnym i rzucie pionowym

$$v = v_0 - gt,$$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

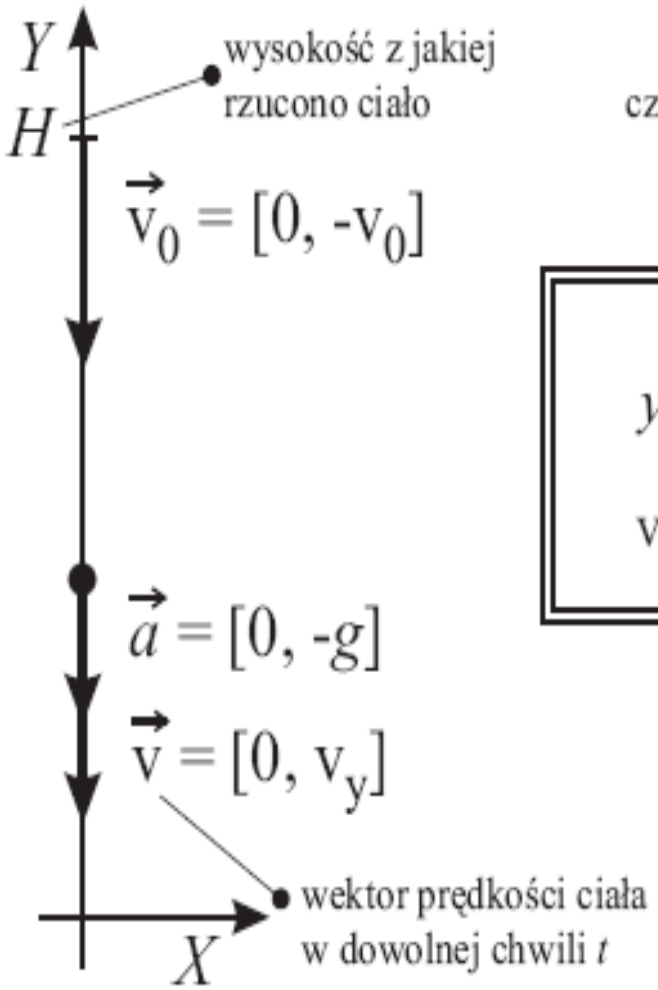
Ruch prostoliniowy

Rzut pionowy w górę



Ruch prostoliniowy

Rzut pionowy w dół



czas trwania rzutu

$$t_k = \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2H}{g}} - \frac{v_0}{g}$$

$$y = H - v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$v_y = -v_0 - gt$$

wartość prędkości końcowej

$$v_k = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$$

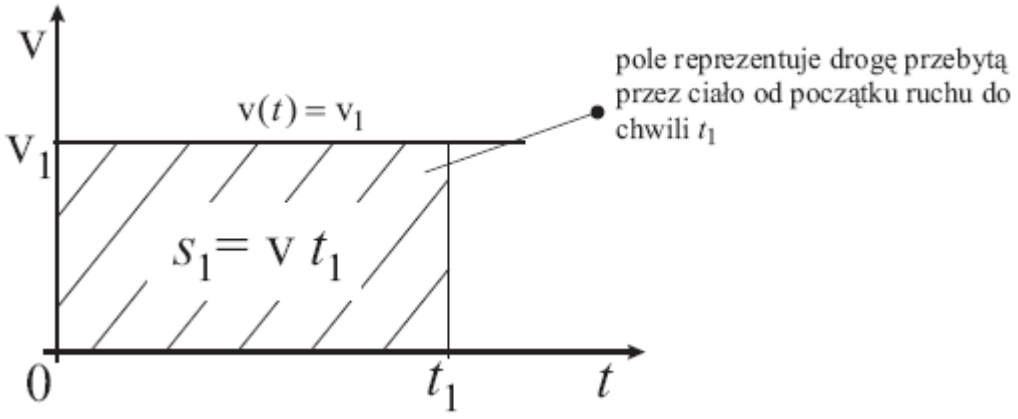
Ruch prostoliniowy

Wyznaczanie równań ruchu metodą całkowania

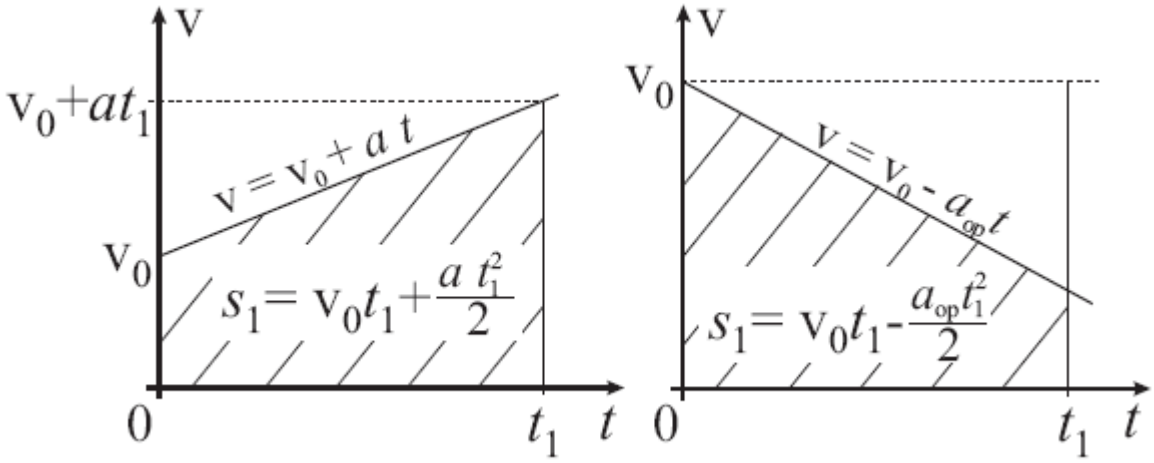
Ruch prostoliniowy

Graficzne wyznaczanie drogi

Ruch jednostajny



Ruch jednostajnie zmienny



Ruch w dwóch i trzech wymiarach

- Założenia:

  - tor ruchu nie musi być linią prostą,

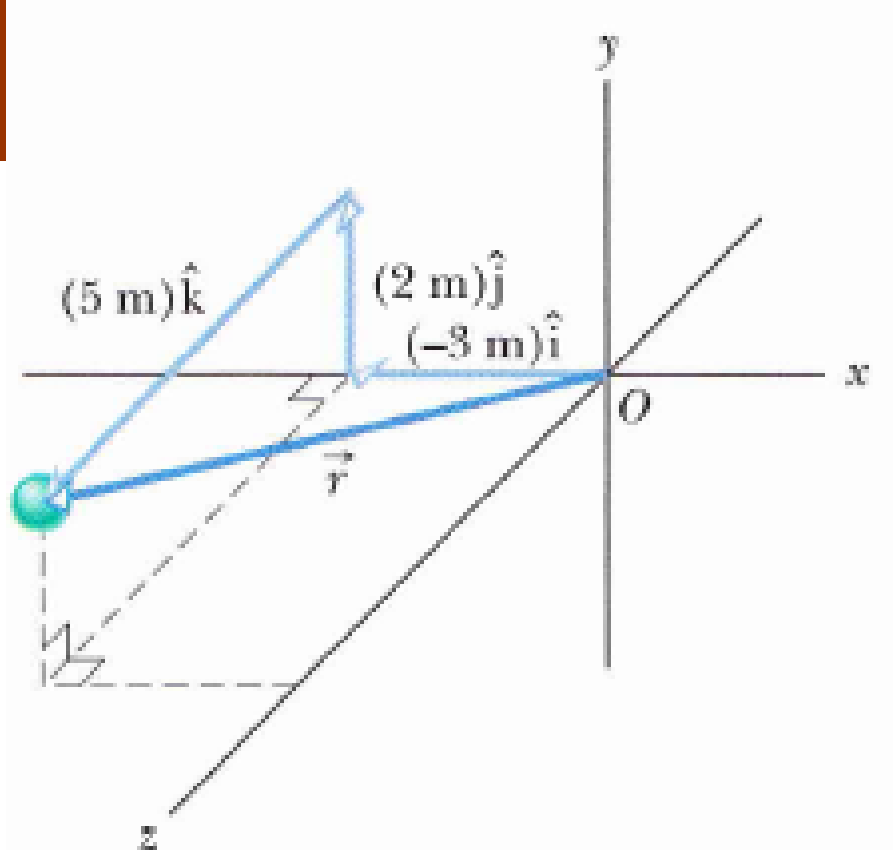
  - ciągle interesuje nas sam ruch i jego zmiany a nie ich przyczyny,

  - poruszające się ciało traktujemy jak obiekt punktowy, czyli obdarzony masą lecz bez rozmiaru

Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Położenie

Wektor położenia (wektor wodzący) – wektor łączący punkt, w którym znajduje się cząstka z punktem odniesienia (np. początek układu współrzędnych)



$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Ruch w dwóch i trzech wymiarach

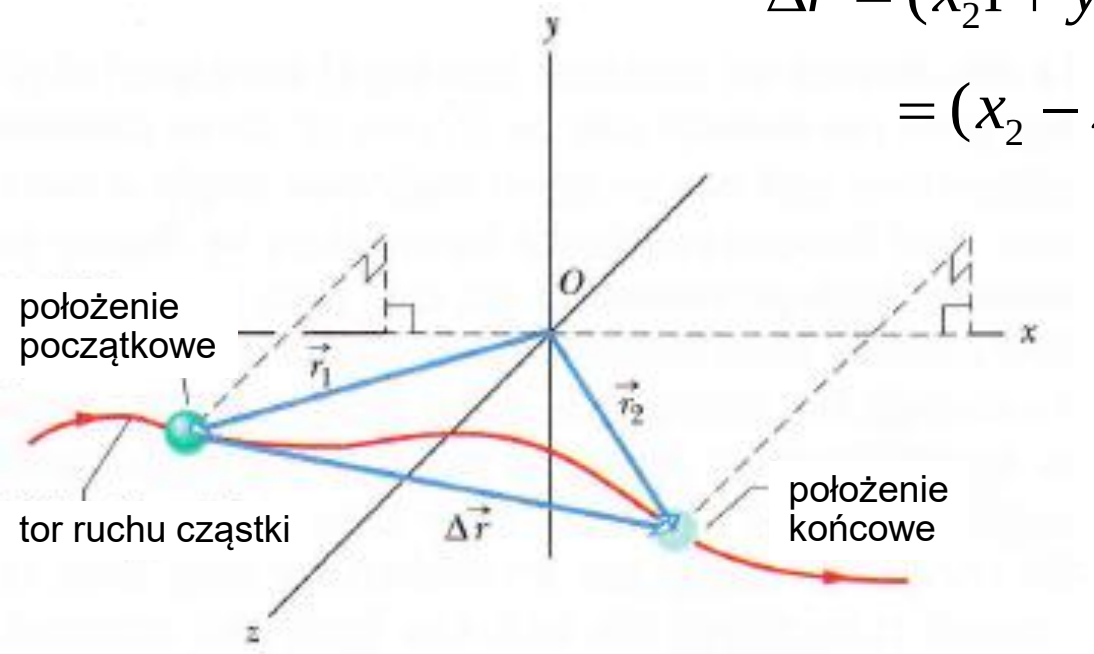
Przemieszczenie

Gdy wektory położenia cząstki w pewnym przedziale czasu zmienia się od $\boldsymbol{r}_1$ do $\boldsymbol{r}_2$, to przemieszczenie cząstki w tym przedziale czasu wynosi

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\Delta\vec{r} = (x_2\hat{\mathrm{i}} + y_2\hat{\mathrm{j}} + z_2\hat{\mathrm{k}}) - (x_1\hat{\mathrm{i}} + y_1\hat{\mathrm{j}} + z_1\hat{\mathrm{k}}) =$$

$$= (x_2 - x_1)\hat{\mathrm{i}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathrm{j}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathrm{k}}$$



Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Wektor prędkości

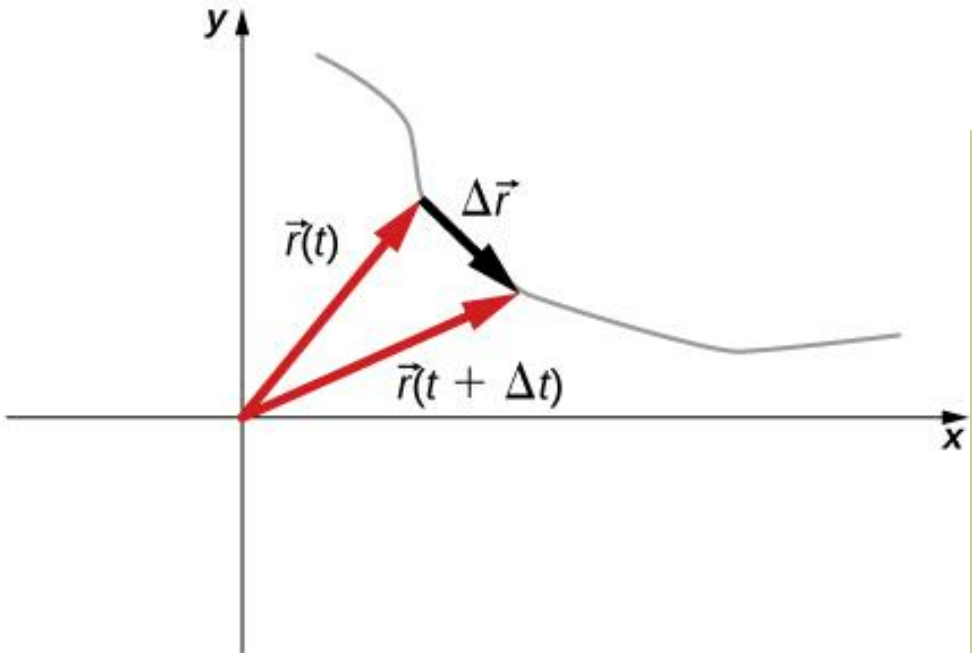
$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} + v_z(t)\hat{k}$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}$$

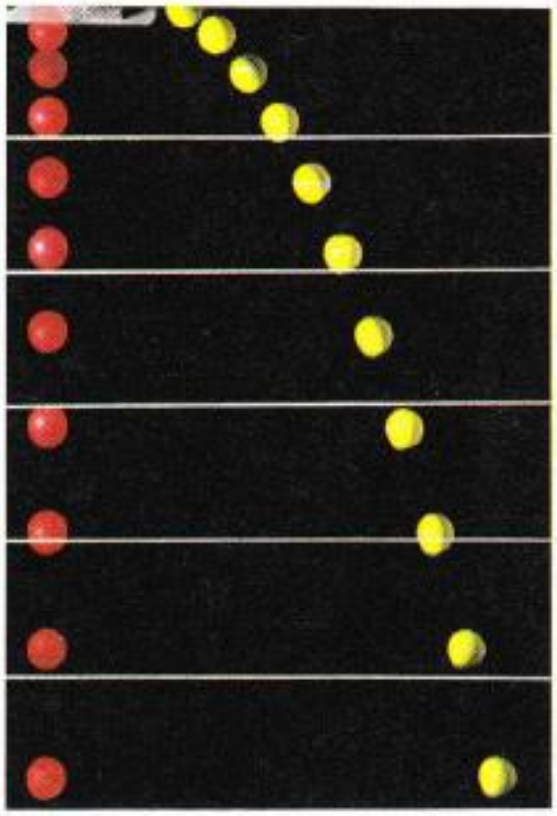
$$\vec{v}_{\text{śr}} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

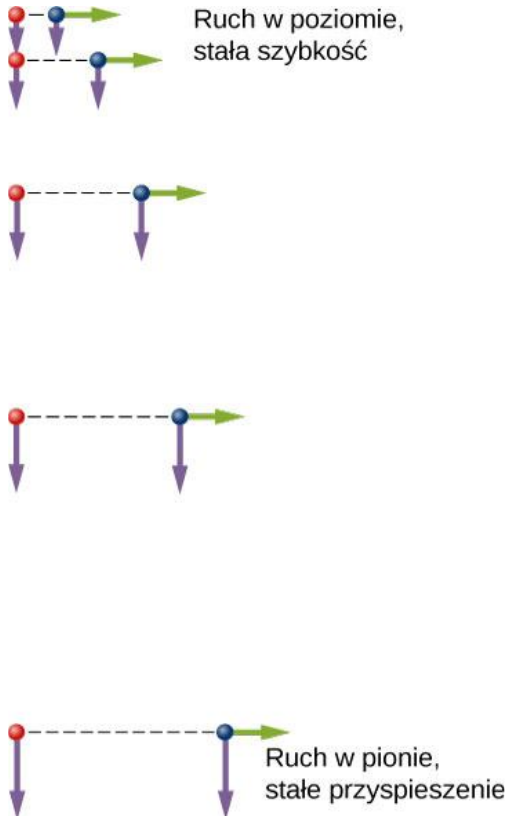


Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Niezależność ruchu w kierunkach prostopadłych

- W opisie kinematycznym ruchu składowe poziome i pionowe ruchu możemy traktować niezależnie.
- W wielu przypadkach ruch w kierunku poziomym nie wpływa na ruch w kierunku pionowym i odwrotnie.





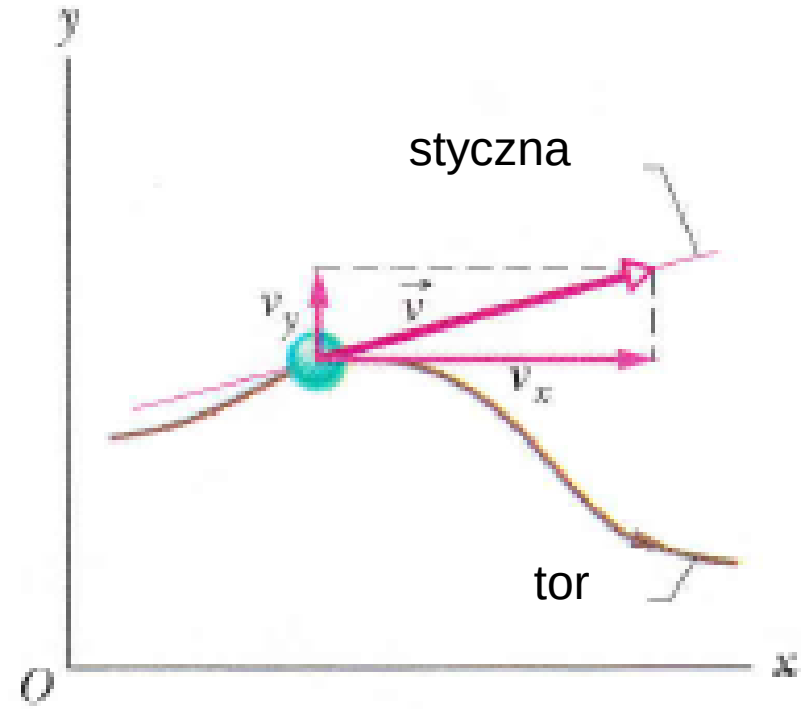
Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Przyspieszenie

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z(t)}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\hat{k}$$



Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Przyspieszenie

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t \qquad v_y(t) = v_{0y} + a_y t$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} \quad \text{oraz} \quad \vec{v}(t) = v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j}$$

Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Rzut poziomy w polu grawitacyjnym

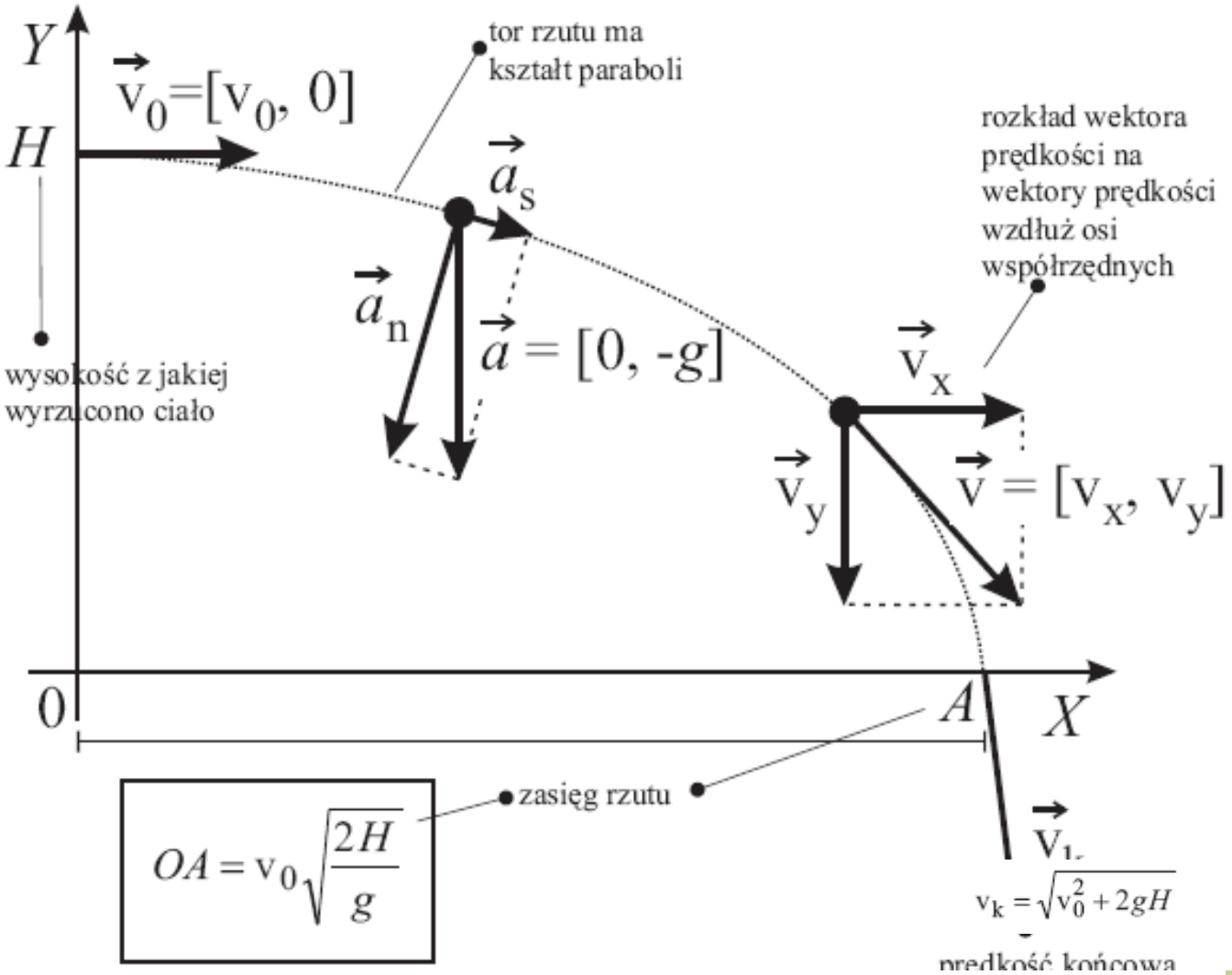
$$x = v_0 t$$

$$v_x = v_0$$

$$y = H - \frac{g t^2}{2}$$

$$v_y = -g t$$

$$a_y = -g$$



Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Rzut poziomy w polu grawitacyjnym – obliczenia

■ **Rzut poziomy** jest złożeniem dwóch ruchów: jednostajnie zmiennego wzdłuż osi OY i jednostajnego wzdłuż osi OX. Zakładamy, że ciało zostało rzucone z wysokości H z prędkością początkową v_0 skierowaną poziomo. Z powyższego wynika, że ciało porusza się w kierunku OX ze stałą prędkością v_0, a w kierunku OY ze stałym przyspieszeniem g. Współrzędne położenia ciała i jego prędkości w dowolnej chwili czasu t opisują równania:

$$\begin{cases} x = v_{0x}\, t = v_0\, t \\ y = H + \dfrac{a_y\, t^2}{2} = H - \dfrac{g\, t^2}{2} \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0 \\ v_y = a_y\, t = -g\, t \end{cases}.$$

Czas trwania rzutu t_k wyznaczamy z warunku $y = 0$, więc

$$0 = H - \frac{g\, t_k^2}{2}, \quad \text{stąd} \quad t_k = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Wiedząc, ile będzie trwał ruch ciała, możemy wyznaczyć zasięg rzutu: $OA = v_0\, t_k = v_0 \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$.

Wartość prędkości ciała w dowolnej chwili czasu wynosi: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (g\, t)^2}$,

natomiast prędkość końcowa ciała (w chwili uderzenia o ziemię) wyraża się zależnością:

$$v_k = \sqrt{v_0^2 + (g\, t_k)^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gH}.$$

Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Rzut ukośny w polu grawitacyjnym

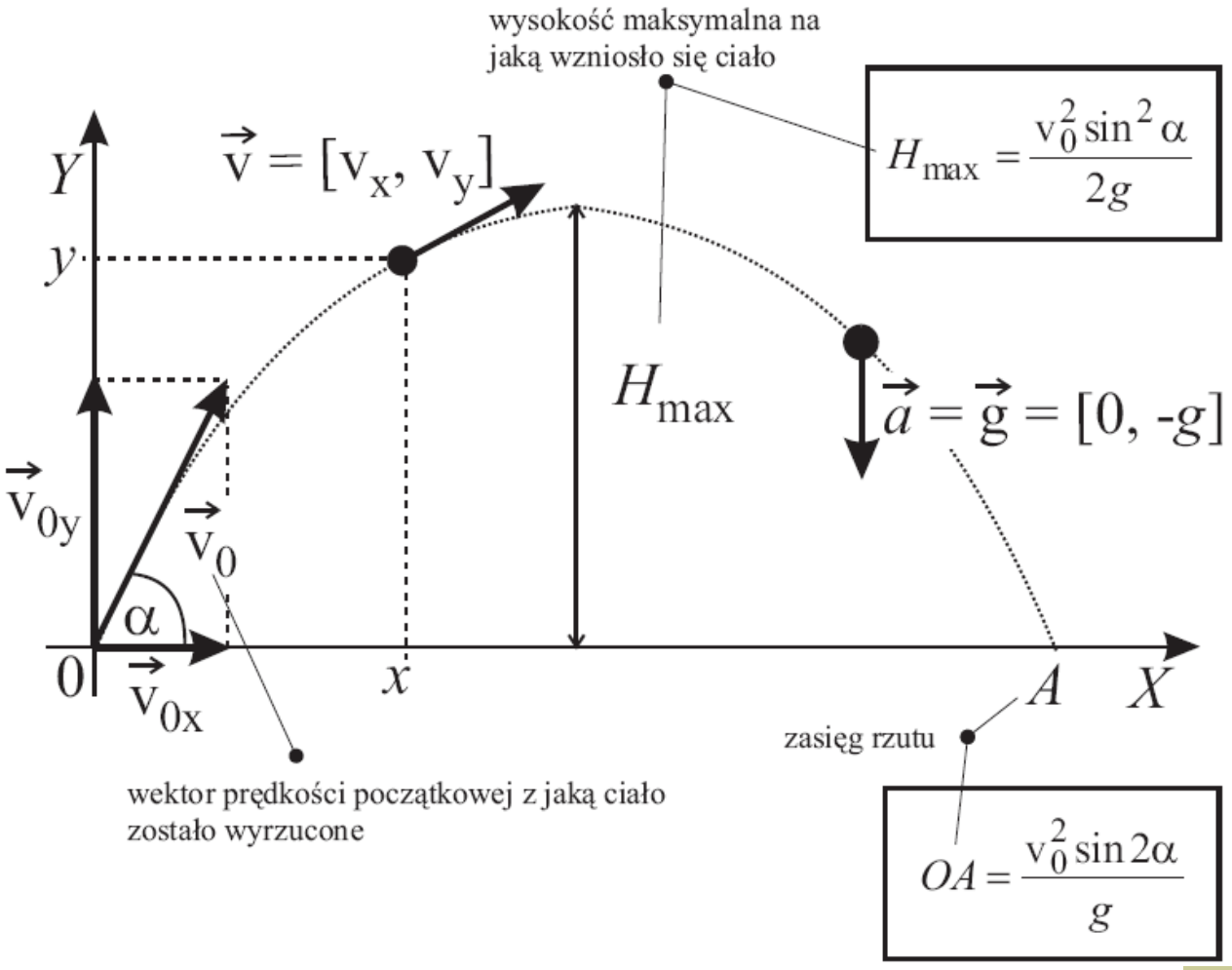
$$x = v_0 t \cos\alpha$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{g t^2}{2}$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - g t$$

$$a_y = -g$$



Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Rzut ukośny w polu grawitacyjnym - obliczenia

$$x = v_{0x}\,t = v_0\,t\cos\alpha \qquad y = v_{0y}\,t + \frac{a_y\,t^2}{2} = v_0\,t\sin\alpha - \frac{g\,t^2}{2}$$

$$v_x = v_{0x} = v_0\cos\alpha \quad \text{i} \quad v_y = v_{0y} + a_y\,t = v_0\sin\alpha - g\,t \,.$$

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g$$

Równania te pozwalają wyznaczyć parametry rzutu ukośnego.

A) Czas trwania rzutu otrzymujemy podstawiając $y = 0$, czyli

$0 = v_0\,t\sin\alpha - \frac{g\,t^2}{2}$, skąd $t = 0$ (chwila początkowa) lub $t = t_k = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}$ (chwila upadku ciała).

B) Zasięg rzutu otrzymamy podstawiając do wzoru $x = v_0\,t\cos\alpha$ czas $t = t_k$, czyli

$$OA = \frac{2\,v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}.$$

C) Maksymalna wysokość na jaką wzniesie się ciało $H_{max} = y$ gdy $v_y = 0$. Z równania $0 = v_0\sin\alpha - g\,t$ wyznaczamy czas wznoszenia się ciała $t = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$ i podstawiamy do wzoru

$$H_{max} = v_0\,t\sin\alpha - \frac{g\,t^2}{2} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g} - \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Rzut ukośny w polu grawitacyjnym – tor ruchu

■ **Równanie toru** wyznaczamy podobnie jak w rzucie poziomym z równań $x = x(t)$ i $y = y(t)$. Z pierwszego wyznaczamy czas $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ i wstawiając do drugiego otrzymujemy

$$y = v_0 \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \sin\alpha - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2,$$

czyli

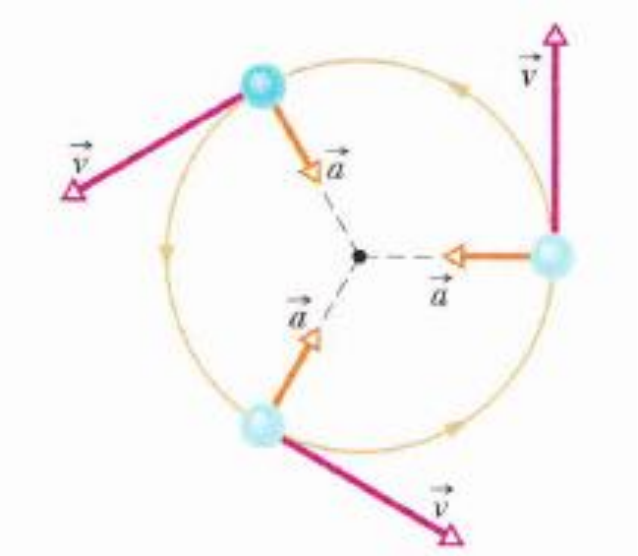
$$y = \operatorname{tg}\alpha\, x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2.$$

Jest to również równanie paraboli skierowanej ramionami w dół, której maksimum jest dla $x = \frac{OA}{2}$

Ruch po okręgu

Ruch jednostajny po okręgu

- ruch odbywa się po okręgu lub kołowym łuku z prędkością o stałej wartości,
- choć wartość prędkości się nie zmienia, ruch cząstki jest ruchem przyspieszonym



$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

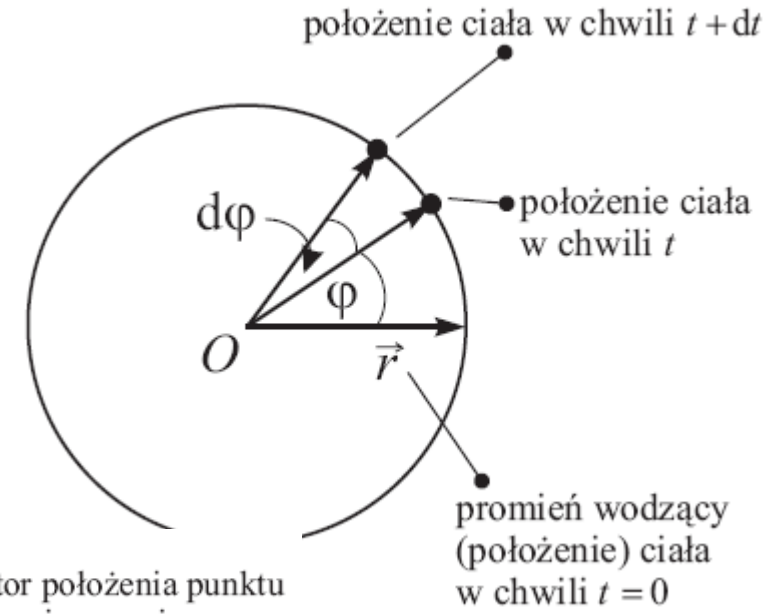
promień okręgu

okres obiegu

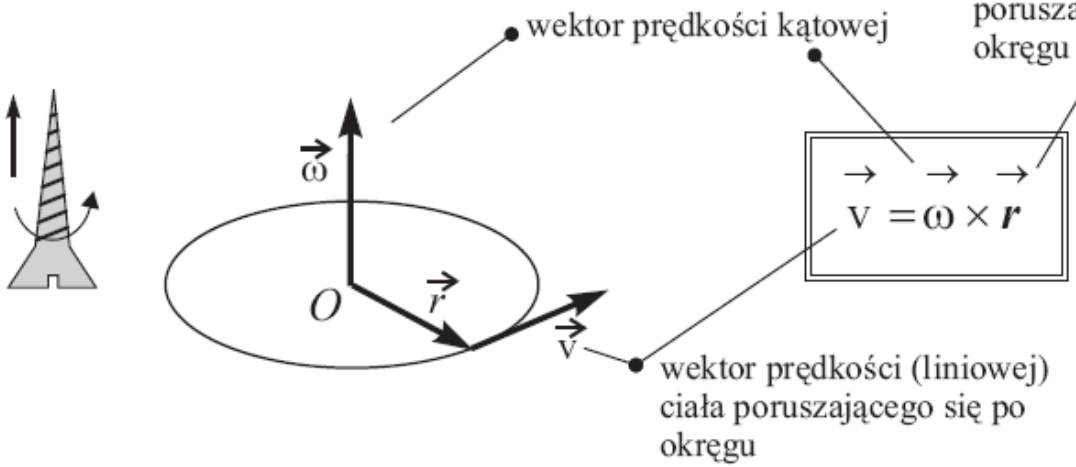
Ruch po okręgu

Wielkości kątowe – prędkość kątowa

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$



Wektor prędkości kątowej

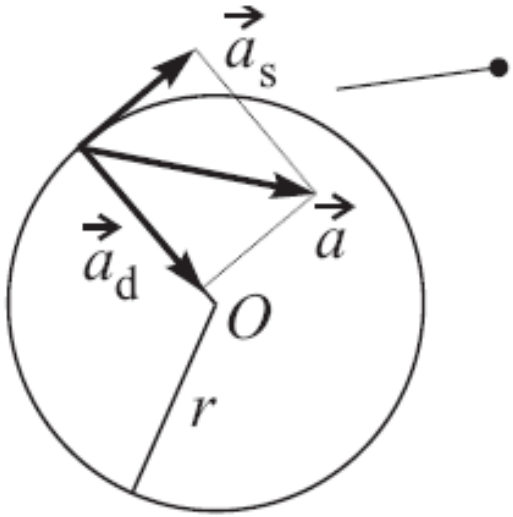


Ruch po okręgu

Wielkości kątowe – przyspieszenie kątowe

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$$

$$a_s = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$



rozkład wektora przyspieszenia całkowitego $\vec{a}$ na wektor przyspieszenia stycznego $\vec{a}_s$ i dośrodkowego $\vec{a}_d$

$$\vec{a} = \vec{a}_s + \vec{a}_d$$

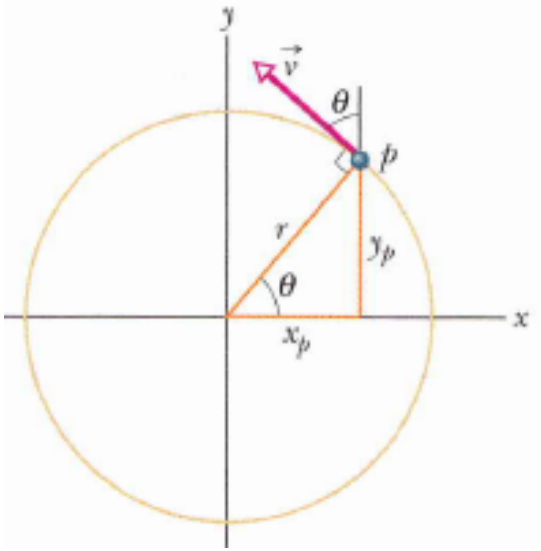
$$a_s = \varepsilon r$$

$$a_d = \omega^2 r$$

Ruch po okręgu

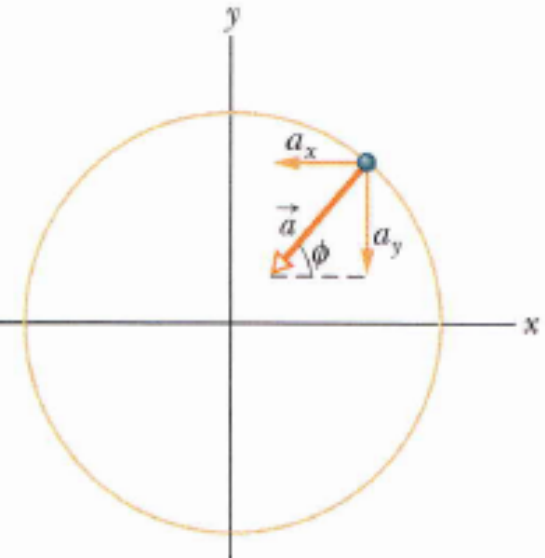
Przyspieszenie dośrodkowe (normalne)

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = (-v\sin\theta)\hat{i} + (v\cos\theta)\hat{j}.$$



$$\vec{v} = \left(-\frac{vy_p}{r}\right)\hat{i} + \left(\frac{vx_p}{r}\right)\hat{j}.$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r}\frac{dy_p}{dt}\right)\hat{i} + \left(\frac{v}{r}\frac{dx_p}{dt}\right)\hat{j}.$$



$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right)\hat{i} + \left(-\frac{v^2}{r}\sin\theta\right)\hat{j}.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{1} = \frac{v^2}{r},$$

Ruch po okręgu

Wielkości liniowe a kątowe

wielkości liniowe	wielkości kątowe
$a_s = \varepsilon R = \text{const}$	$\varepsilon = \text{const}$
$a_{dośr} = \omega^2 R$	
$a = \sqrt{a_s^2 + a_{dośr}^2}$	
$v = v_0 + a_s t$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
$s = v_0 t + \frac{a_s t^2}{2}$	$\alpha = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$
ruch jednostajnie opóźniony po okręgu	
$a_{ops} = -a_s = \text{const} > 0$	$\varepsilon_{op} = -\varepsilon = \text{const} > 0$
$v = v_0 - a_{ops} t$	$\omega = \omega_0 - \varepsilon_{op} t$
$s = v_0 t - \frac{a_{ops} t^2}{2}$	$\alpha = \omega_0 t - \frac{\varepsilon_{op} t^2}{2}$

Dziękuję za uwagę!