

Fizyka 1B

Wykład 1

dr Piotr Sitarek, prof. uczelni

**Katedra Fizyki Doświadczalnej
Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej**

Użyteczne informacje

Moja strona domowa:

sitarek.wppt.pwr.edu.pl

informacje do wykładu:

Dydaktyka/Fizyka 1B

Miejsce konsultacji:

pokój 319, budynek A-1

Plan wykładu

1. *Pomiary i wielkości fizyczne. Rachunek wektorowy*
2. *Kinematyka punktu materialnego*
3. *Zasady dynamiki Newtona. Równania ruchu*
4. *Układy nieinercjalne. Siły*
5. *Energia kinetyczna, potencjalna, praca*
5. *Środek masy, pęd*
6. *Obroty*
7. *Moment siły, momentu pędu*
8. *Równowaga i sprężystość*
9. *Grawitacja*
10. *Drgania. Fale mechaniczne*
11. *Elementy termodynamiki*

Literatura

Wykład

- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: **Podstawy Fizyki**, tomy 1 - 2, Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 2003 (lub nowsze).
- K. Sierański, P. Sitarek, K. Jezierski, **Repetytorium. Wzory i prawa z objaśnieniami**, Oficyna Wydawnicza Scripta, 2002.
- K. Sierański, K. Jezierski, B. Kołodka, **Wzory i prawa z objaśnieniami, cz. 1**, Oficyna Wydawnicza Scripta, 2005.
- K. Sierański, K. Jezierski, B. Kołodka, **Wzory i prawa z objaśnieniami, cz. 2**, Oficyna Wydawnicza Scripta, 2006.
- K. Sierański, J. Szatkowski, **Wzory i prawa z objaśnieniami, cz. 3**, Oficyna Wydawnicza Scripta, 2008.
- Fizyka dla szkół wyższych** <https://openstax.org/l/fizyka-tom-1> i kolejne
- H. D. Young, R. A. Freedman, **Sear's & Zemansky's University Physics with Modern Physics**, Addison-Wesley Publishing Company, 2000.

Literatura (cd)

Ćwiczenia

Fizyka dla szkół wyższych <https://openstax.org/l/fizyka-tom-1> i kolejne
J.Walker, **Podstawy fizyki. Zbiór zadań**, Wydawnictwa Naukowe PWN,
Warszawa 2005.

K.Jezierski, B.Kołodka, K.Sierański, **Zadania z rozwiązaniami**, Oficyna
Wydawnicza Scripta.

K.Jezierski, K.Sierański, I.Szlufarska, **Repetytorium. Zadania z rozwiązaniami**,
Oficyna Wydawnicza Scripta, 2003.

Pomoce dydaktyczne

Na kanale YouTube Politechniki są dostępne ciekawe filmy i wykłady:

- **Seria „Fizyka ...” – wykłady pani prof. Ewy Popko**
- **Seria „Fenomeny ...” – zagadnienia fizyczne i nie tylko omawiane przez prof. Macieja Mulaka**

Zaliczenie

Egzamin!

Pomiary i wielkości fizyczne

Fizyka to nauka eksperymentalna

Fizycy (i inni obserwatorzy) obserwują naturę i starają się znajdować schematy i zasady, które do tych zjawisk się odnoszą. Te schematy nazywamy **teoriami fizycznymi**.

Np. D.Halliday, R.Resnick, J.Walker, **Podstawy fizyki** (PWN)
H. D. Young, R. A. Freedman, **Sear's & Zemansky's University Physics with Modern Physics**, Addison-Wesley Publishing Company, 2000.
K.Sierański, P.Sitarek, K.Jezierski, **Repetytorium** ... (Scripta)
openstax.org/l/fizyka-tom-1

Pomiary i wielkości fizyczne

Rozwiązywanie problemów fizycznych – metodologia.

1. Zidentyfikowanie problemu – znalezienie zasad fizycznych, które mają miejsce
2. Opisanie problemu – szkice, równania
3. Rozwiązanie – matematyczne
4. Sprawdzenie wyniku pod kątem fizycznym

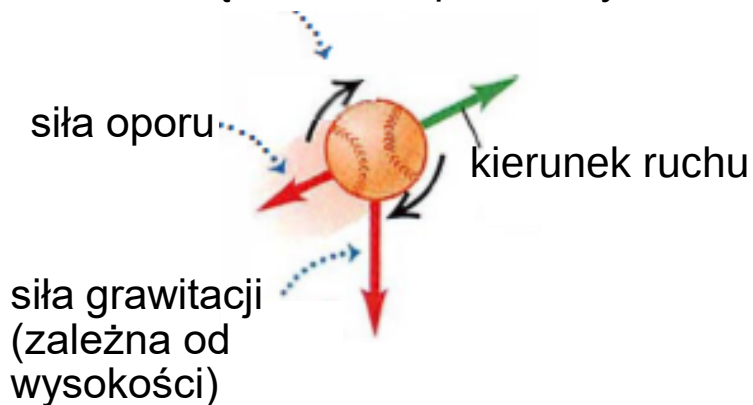
Pomiary i wielkości fizyczne

Model wyidealizowany

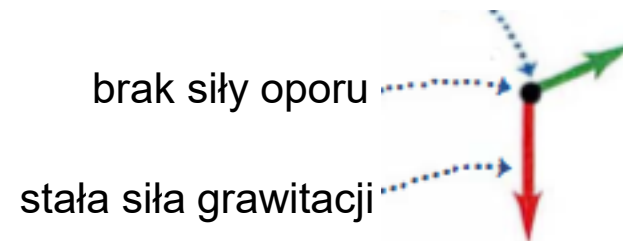
- uproszczona wersja systemu fizycznego

Np. rzut piłką baseball'ową

piłka obraca się, ma skomplikowany kształt

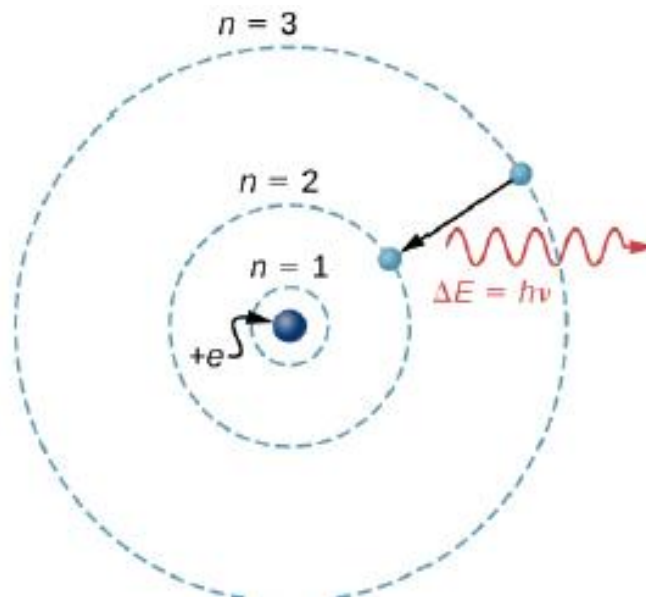


piłka traktowana jako punkt materialny



Pomiary i wielkości fizyczne

Model wyidealizowany



Model atomu Bohra

Pomiary i wielkości fizyczne

Eksperyment fizyczny wymaga pomiarów, których wynik opisujemy zwykle liczbami – wielkości fizyczne (np. waga, wzrost).

Niektóre wielkości fizyczne są tak podstawowe, że możemy tylko opisać jak je mierzyć, np. pomiar :

- długości
- czasu

Inne wielkości zależą od wielkości podstawowych, np. prędkość.

Aby pomiar był wiarygodny, niezbędne jest aby był powtarzalny niezależnie od miejsca pomiaru.

Od 1960 roku obowiązuje Międzynarodowy System Miar i Wag (SI – z j. francuskiego).

Pomiary i wielkości fizyczne

Na podstawie powyższych rozważań Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna wyróżniła siedem wielkości podstawowych, które tworzą Międzynarodowy Układ Wielkości (ISQ) i opisują podstawowe jednostki układu SI.

Wielkość podstawowa układu ISQ	Jednostka podstawowa układu SI
długość	metr (m)
masa	kilogram (kg)
czas	sekunda (s)
natężenie prądu elektrycznego	amper (A)
temperatura termodynamiczna	kelwin (K)
liczność materii	mol (mol)
światłość	kandela (cd)

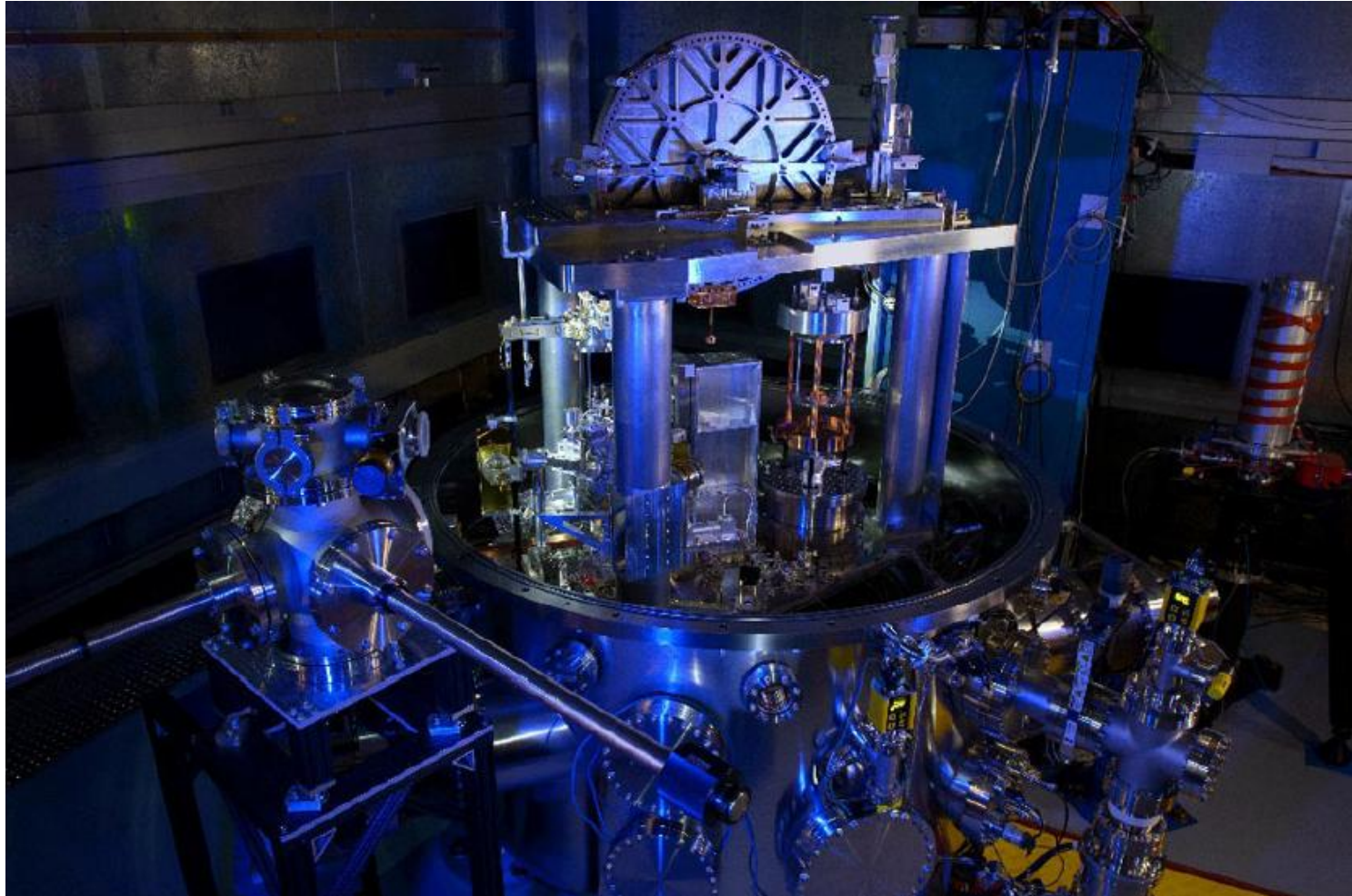
Pomiary i wielkości fizyczne

Te wielkości podstawowe (tworzące Międzynarodowy Układ Wielkości (ISQ)) określone są poprzez fundamentalne stałe fizyczne:

SYMBOL	NAZWA	WARTOŚĆ
$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	częstotliwość przejścia nadsubtelnego w atomie cezu ^{133}Cs	9 192 631 770 s ⁻¹
c	prędkość światła w próżni	299 792 458 m·s ⁻¹
h	stała Plancka	6,626 070×10 ⁻³⁴ J·s
e	ładunek elementarny	1,602 177×10 ⁻¹⁹ C
k	stała Boltzmann	1,380 649×10 ⁻²³ J·K ⁻¹
N_{A}	stała Avogadro	6,022 141×10 ²³ mol ⁻¹
K_{cd}	kandela - dla promieniowania o częstotliwości 540×10 ¹² Hz	683 lm·W ⁻¹

Pomiary i wielkości fizyczne

Np. urządzenie do precyzyjnego wyznaczania stałej Plancka (waga Watta) wygląda następująco:

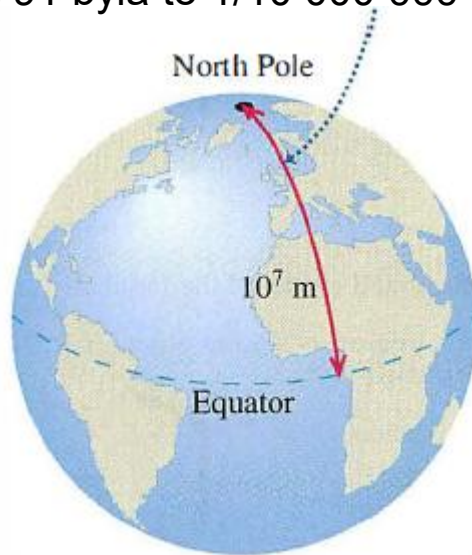


Pomiary i wielkości fizyczne

Definicje jednostek podstawowych wielkości fizycznych ewoluowały poprzez wieki.

Metr

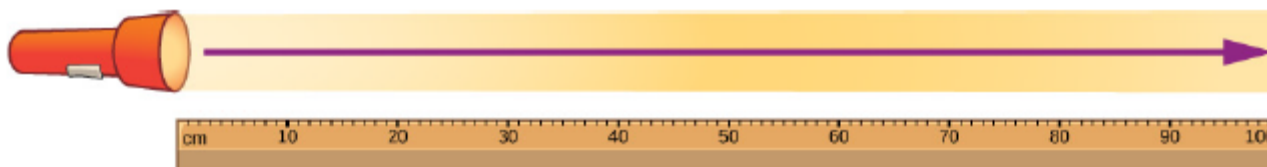
w 1791 była to $1/10\,000\,000$ poniższej długości



Pomiary i wielkości fizyczne

Metr

Aktualnie:



Na przebycie 1 metra światło potrzebuje
1/299 792 458 sekundy

Wielkość	Długość w metrach
odległość Ziemi od najstarszych galaktyk	$2 \cdot 10^{26}$
odległość Ziemi od galaktyki Andromedy	$2 \cdot 10^{22}$
odległość Ziemi od najbliższej gwiazdy (Proxima Centauri)	$4 \cdot 10^{16}$
odległość Ziemi od Plutona	$6 \cdot 10^{12}$
promień Ziemi	$6 \cdot 10^6$
wysokość Mt. Everestu	$9 \cdot 10^3$
grubość tej kartki	$1 \cdot 10^{-4}$
rozmiar wirusa	$1 \cdot 10^{-8}$
promień atomu wodoru	$5 \cdot 10^{-11}$
promień protonu	$1 \cdot 10^{-15}$

Pomiary i wielkości fizyczne

Pomiar odległości



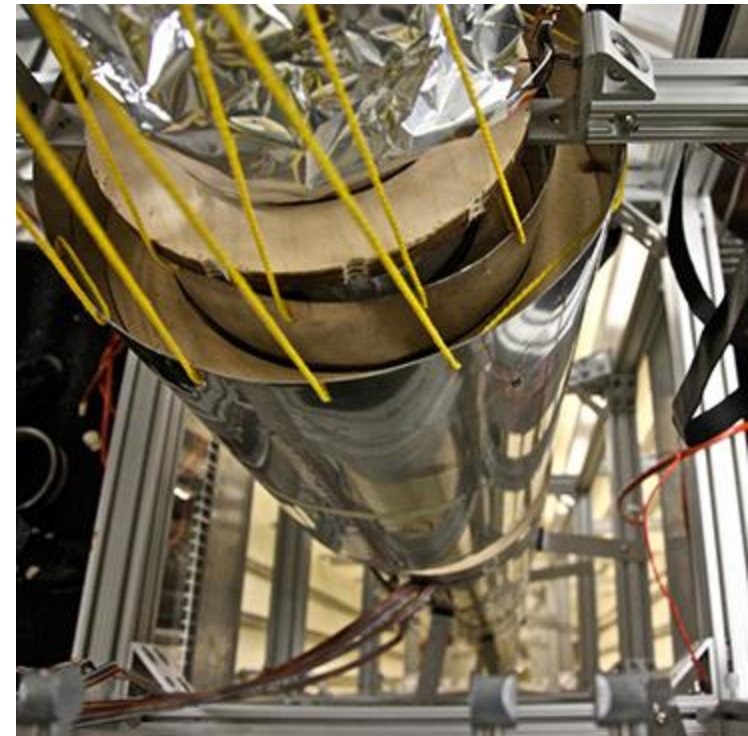
Pomiary i wielkości fizyczne

Sekunda

Między 1889 a 1967 była to część tzw. dnia słonecznego, czyli czasu gdy Słońce osiąga najwyższy punkt na niebie.

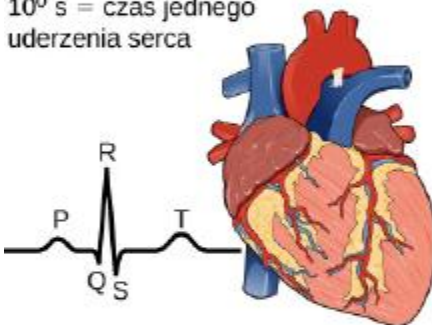
Od 1967 roku 1 sekunda jest to 9 192 631 770 cykli promieniowania mikrofalowego cezu – tzw. zegar atomowy.

Dzięki zliczaniu drgań atomu cezu zegar atomowy odmierza czas z dokładnością wyższą niż jedna mikrosekunda na rok. Tzw. fontanna atomowa widoczna na zdjęciu ma długość prawie 9 m. Np. system GPS korzysta z dokładności zegara atomowego.



Pomiary i wielkości fizyczne

Sekunda

Czas w sekundach (s)
10^{-22} s = czas życia bardzo niestabilnego jądra atomu
10^{-17} s = czas wykonania przez superkomputer pojedynczej operacji mienno przecinkowej
10^{-15} s = czas pojedynczego drgania fali światła w zakresie widzialnym
10^{-13} s = czas pojedynczego drgania atomu w ciele stałym
10^{-3} s = czas przesyłu impulsu nerwowego
10^0 s = czas jednego uderzenia serca

10^5 s = jeden dzień
10^7 s = jeden rok
10^9 s = czas życia człowieka
10^{11} s = udokumentowana historia ludzkości
10^{17} s = wiek Ziemi
10^{18} s = wiek Wszechświata

Pomiary i wielkości fizyczne

Kilogram



walec platynowo-irydowy

lub węgiel C12, którego masa wynosi 12 atomowych jednostek masy:

$$1u = 1,660\,538\,86 \cdot 10^{-27}\text{kg}$$

	kg
znany wszechświat	10^{53}
nasza galaktyka	$2 \cdot 10^{41}$
Słońce	$2 \cdot 10^{30}$
Księżyc	$7 \cdot 10^{22}$
liniowiec	$7 \cdot 10^7$
słoń	$3 \cdot 10^3$
winogrono	$3 \cdot 10^{-3}$
cząsteczka penicyliny	$5 \cdot 10^{-17}$
atom uranu	$4 \cdot 10^{-25}$
elektron	$9 \cdot 10^{-31}$

Pomiary i wielkości fizyczne

Przedrostki jednostek miar układu SI

greckie litery	symbol	znaczenie	łacińskie określenia	symbol	znaczenie
jotta-	Y	10^{24}	jokto-	y	10^{-24}
zetta-	Z	10^{21}	zepto-	z	10^{-21}
eksa-	E	10^{18}	atto-	a	10^{-18}
peta-	P	10^{15}	femto-	f	10^{-15}
tera-	T	10^{12}	piko-	p	10^{-12}
giga-	G	10^9	nano-	n	10^{-9}
mega-	M	10^6	mikro-	μ	10^{-6}
kilo-	k	10^3	mili-	m	10^{-3}
hekto-	h	10^2	centy-	c	10^{-2}
deka-	da	10^1	decy-	d	10^{-1}

Pomiary i wielkości fizyczne

Przeliczanie jednostek

Np.

$$\textit{prędkość} = 60 \frac{\text{mila}}{\text{h}}$$

lub

$$1 \text{ rok świetlny} = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s} \times 1 \text{ rok}$$

Pomiary i wielkości fizyczne

Cyfry znaczące w obliczeniach

Ważnym czynnikiem wpływającym na precyzję pomiaru jest używany przez nas przyrząd. Ogólnie rzecz biorąc, precyzyjny przyrząd powinien umożliwiać dokonywanie pomiarów z dokładnością do bardzo małych wartości.

Przy pomocy zwykłej linijki możemy dokonywać pomiarów z dokładnością do 1 mm, podczas gdy pomiary dokonane przy pomocy suwmiarki mogą charakteryzować się dokładnością do 0,02 mm.

Im bardziej precyzyjny przyrząd, tym wyższa precyzja pomiaru.

Wynik pomiaru należy zapisać tak, aby liczba cyfr po przecinku zgadzała się z liczbą cyfr wskazywanych przez przyrząd pomiarowy.

Zasada cyfr znaczących mówi, że ostatnia cyfra pomiaru jest pierwszą cyfrą obarczoną niepewnością pomiarową.

Np.

32,6 kg – 3 cyfry znaczące

0,01450 m – 4 cyfry znaczące

Pomiary i wielkości fizyczne

Cyfry znaczące w obliczeniach

Jeżeli podczas obliczeń operujemy na pomiarach o różnym stopniu precyzji, liczba cyfr znaczących wyniku nie może być większa niż liczba cyfr znaczących pomiaru o najmniejszej precyzji. Wyróżniamy dwie zasady: jedną dla mnożenia i dzielenia, a drugą dla dodawania i odejmowania.

Jeśli chodzi o **mnożenie i dzielenie**, wynik powinien mieć taką samą liczbę cyfr znaczących jak wartość pomiaru o najniższym stopniu precyzji.

Np.

Jeśli znamy promień koła, możemy obliczyć jego pole powierzchni, korzystając ze wzoru $A = \pi r^2$. Sprawdźmy, ile cyfr znaczących ma wartość pola koła, którego promień jest równy $r = 1,2 \text{ m}$ (ma dwie cyfry znaczące). Używając kalkulatora o ośmiocyfrowym wyświetlaczu, otrzymalibyśmy:

$$A = \pi r^2 = 3,1415927 \dots \times (1,2 \text{ m})^2 = 4,5238934 \text{ m}^2.$$

Jednak wartość promienia podana jest z dokładnością do dwóch cyfr znaczących, co oznacza, że otrzymany wynik należy zaokrąglić:

$$A = 4,5 \text{ m}^2$$

Pomiary i wielkości fizyczne

Cyfry znaczące w obliczeniach

W przypadku **dodawania lub odejmowania** wynik nie może mieć więcej cyfr po przecinku niż najmniej precyzyjny pomiar.

Np.

Założmy, że w sklepie spożywczym kupujemy 7,56 kg ziemniaków (ważymy je przy pomocy wagi o precyzji 0,01 kg). W laboratorium (przy pomocy wagi o precyzji 0,001 kg) odmierzamy 6,052 kg ziemniaków i zostawiamy je tam. Następnie zabieramy 13,7 kg ziemniaków (zważonych przy pomocy wagi łazienkowej o precyzji 0,1 kg). Ile kilogramów ziemniaków mamy?

Masę otrzymujemy dzięki prostemu dodawaniu i odejmowaniu:

$$7,56 \text{ kg} - 6,052 \text{ kg} + 13,7 \text{ kg} = 15,208 \text{ kg}.$$

Po dokonaniu obliczeń znajdujemy pomiar o najniższej precyzji: 13,7 kg. Wartość ta podana jest z dokładnością do jednego miejsca po przecinku, a więc wynik końcowy również powinien być podany z taką dokładnością. Zaokrąglamy otrzymany wcześniej wynik do części dziesiętnych i uzyskujemy 15,2 kg.

Rachunek wektorowy

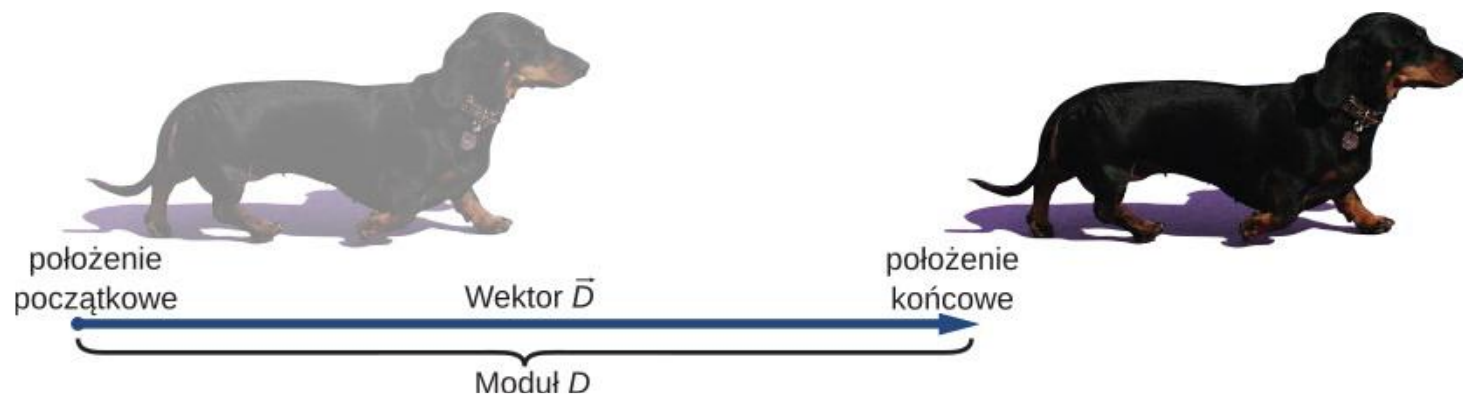
Wielkości fizyczne ze względu na ich własności matematyczne dzielimy na:

Skalar to wielkość, do opisu której wystarczy podanie liczby rzeczywistej. Tak jest w przypadku masy ciała, czasu, temperatury, pracy, energii, ładunku elektrycznego i wielu innych wielkości fizycznych.

Wektor to wielkość, którą opisujemy podając liczbę i kierunek w przestrzeni. Przykładem fizycznych wielkości wektorowych są prędkość i siła. W ich przypadku nie wystarcza podanie ich wartości, konieczne jest podanie kierunku prędkości (ruchu ciała) oraz kierunku siły. W układzie współrzędnych wektor można opisać za pomocą trzech liczb nazywanych składowymi wektora.

Tensor to wielkość, do opisanie której podajemy macierz współczynników, tak jak w przypadku momentu bezwładności. W przestrzennym układzie współrzędnych (3–wym.) tensor to 9 liczb nazywanych współczynnikami (wektor – 3 liczby, skalar – 1 liczba).

Rachunek wektorowy



- wektor rysujemy od punktu zaczepienia (początek wektora) do punktu końcowego (koniec wektora) - oznaczony grotem strzałki,
- moduł wektora jest równy jego długości – jest to liczba dodatnia

$$D \equiv \left| \vec{D} \right|$$

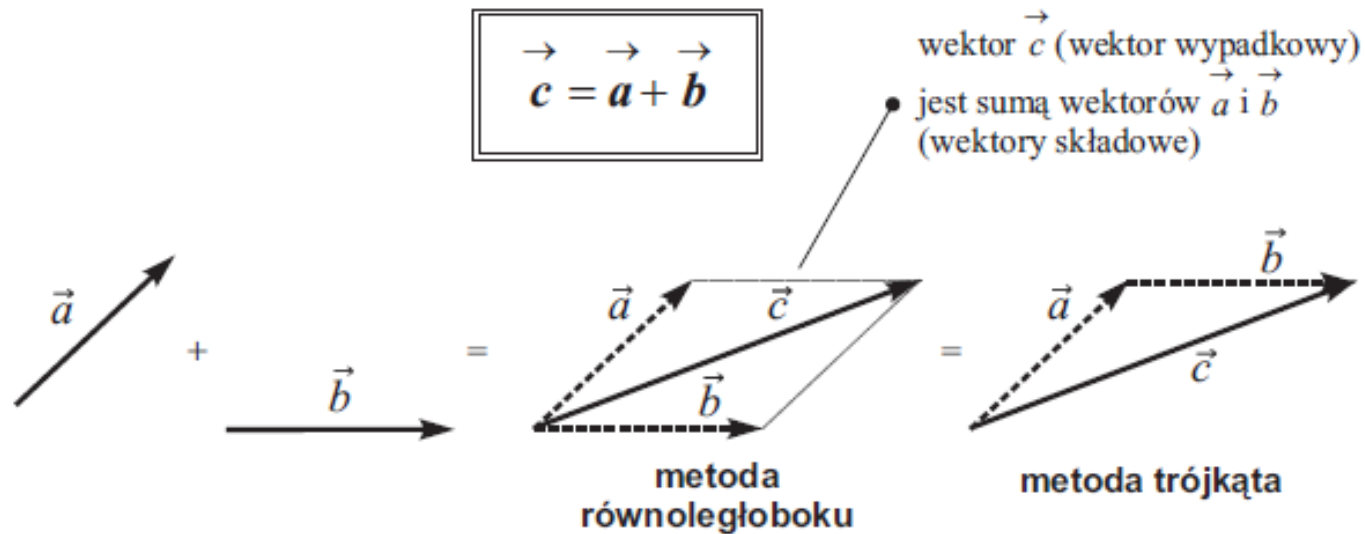
Rachunek wektorowy

(a) $\vec{A}$ i $\vec{B}$ są zgodne



Rachunek wektorowy

Dodawanie (składanie) wektorów

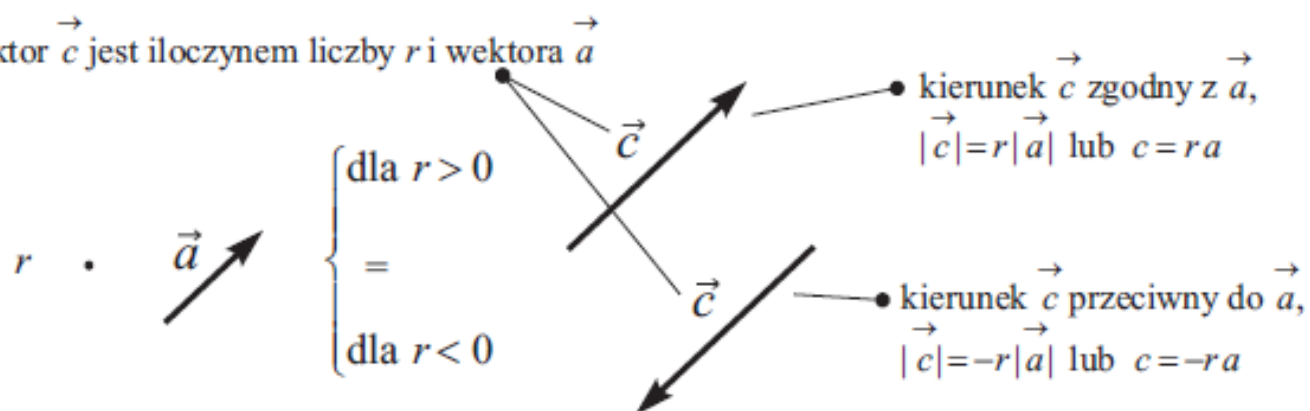


Rachunek wektorowy

Mnożenie wektorów przez liczbę

$$\vec{c} = r \cdot \vec{a}$$

wektor $\vec{c}$ jest iloczynem liczby r i wektora $\vec{a}$



Rachunek wektorowy

Własności działań na wektorach

- dodawanie wektorów jest przemienne

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A},$$

- łączne

$$\left(\vec{A} + \vec{B} \right) + \vec{C} = \vec{A} + \left(\vec{B} + \vec{C} \right)$$

- mnożenie przez skalar jest rozdzielne względem dodawania

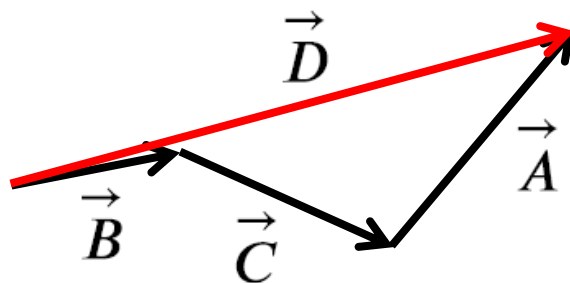
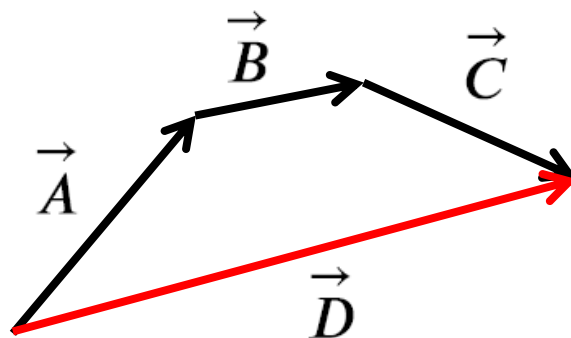
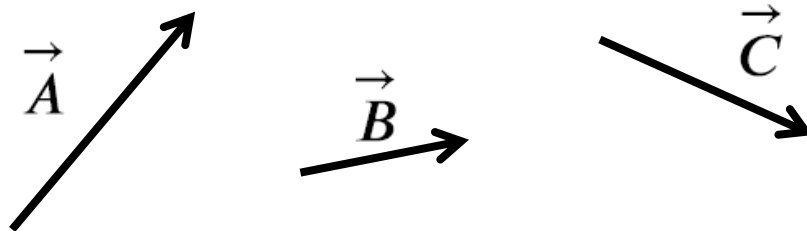
$$\alpha_1 \vec{A} + \alpha_2 \vec{A} = (\alpha_1 + \alpha_2) \vec{A}$$

- mnożenie skalarów przez sumę wektorów jest rozdzielne względem dodawania

$$\alpha \left(\vec{A} + \vec{B} \right) = \alpha \vec{A} + \alpha \vec{B}$$

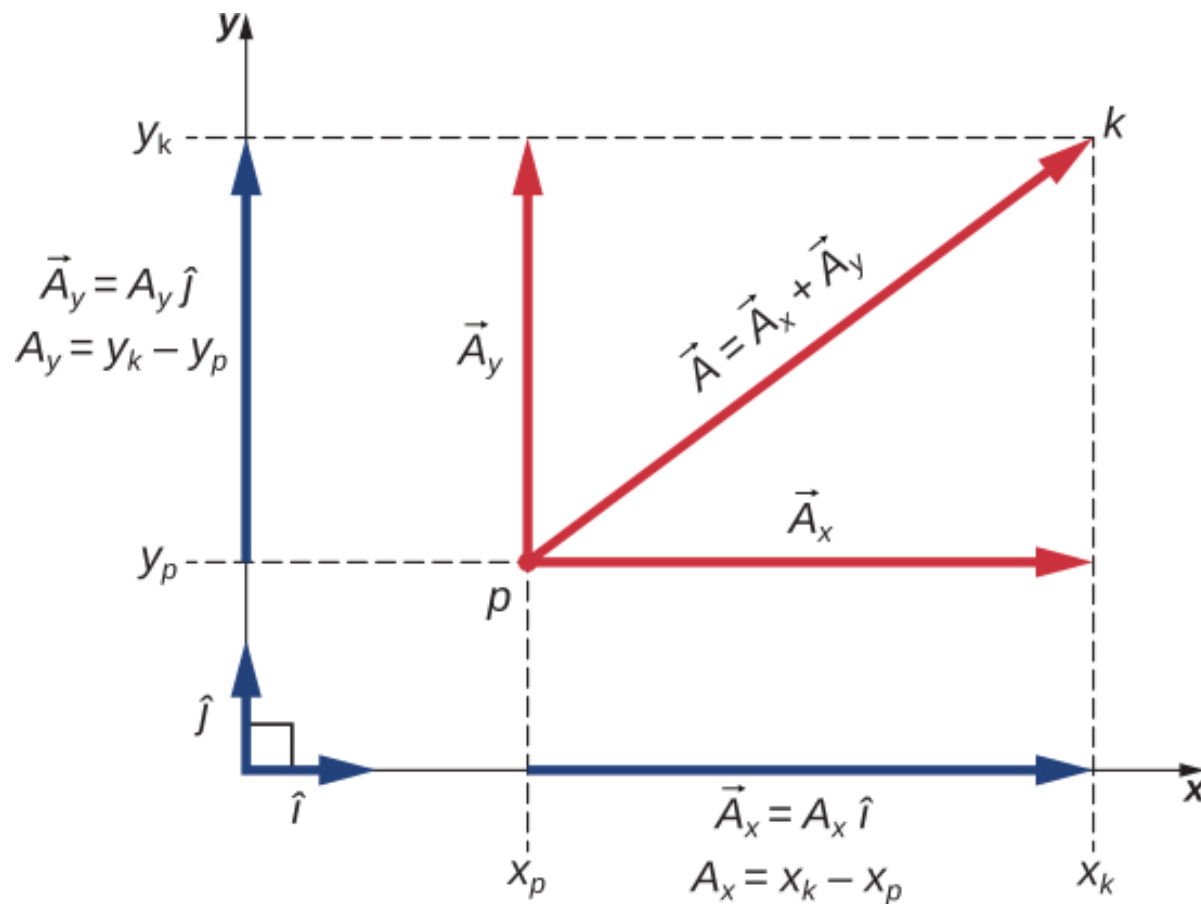
Rachunek wektorowy

Np.



Rachunek wektorowy

Układy współrzędnych i składowe wektora



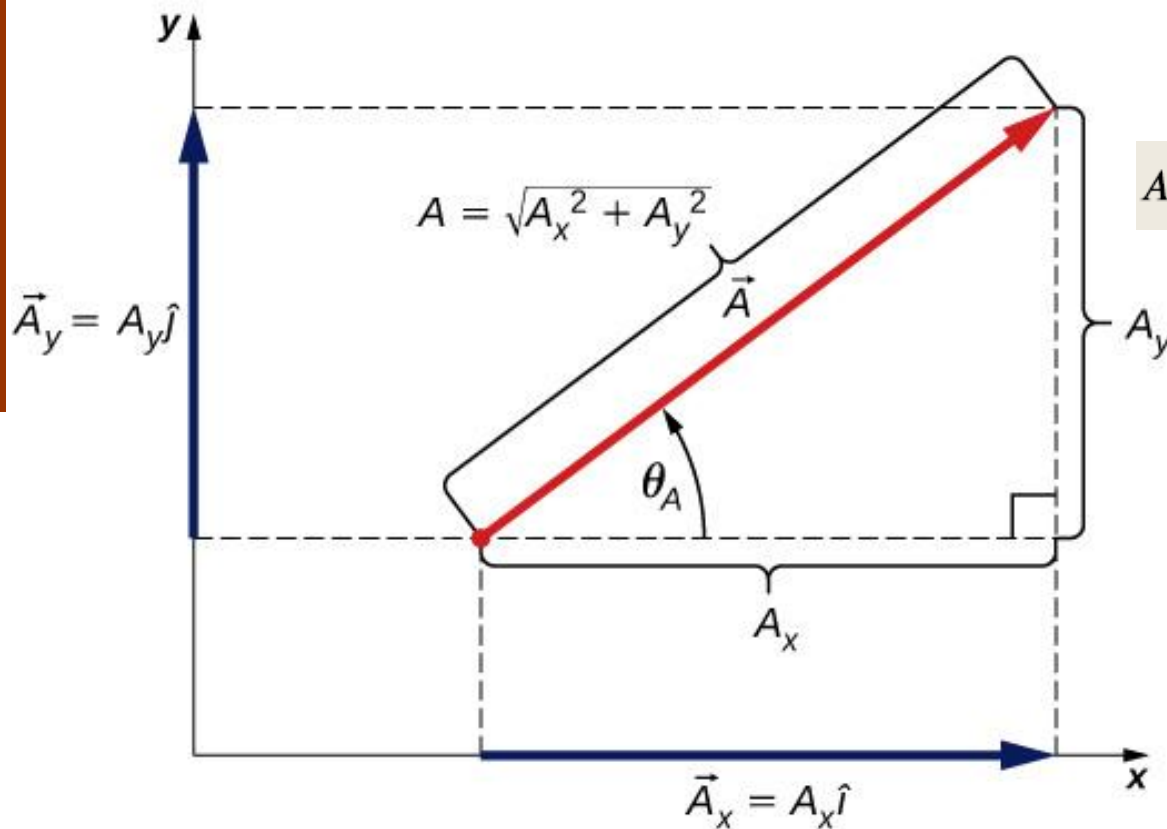
$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

$$\begin{cases} \vec{A}_x = A_x \hat{i} \\ \vec{A}_y = A_y \hat{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_x = x_k - x_p \\ A_y = y_k - y_p \end{cases}$$

Rachunek wektorowy

Układy współrzędnych i składowe wektora



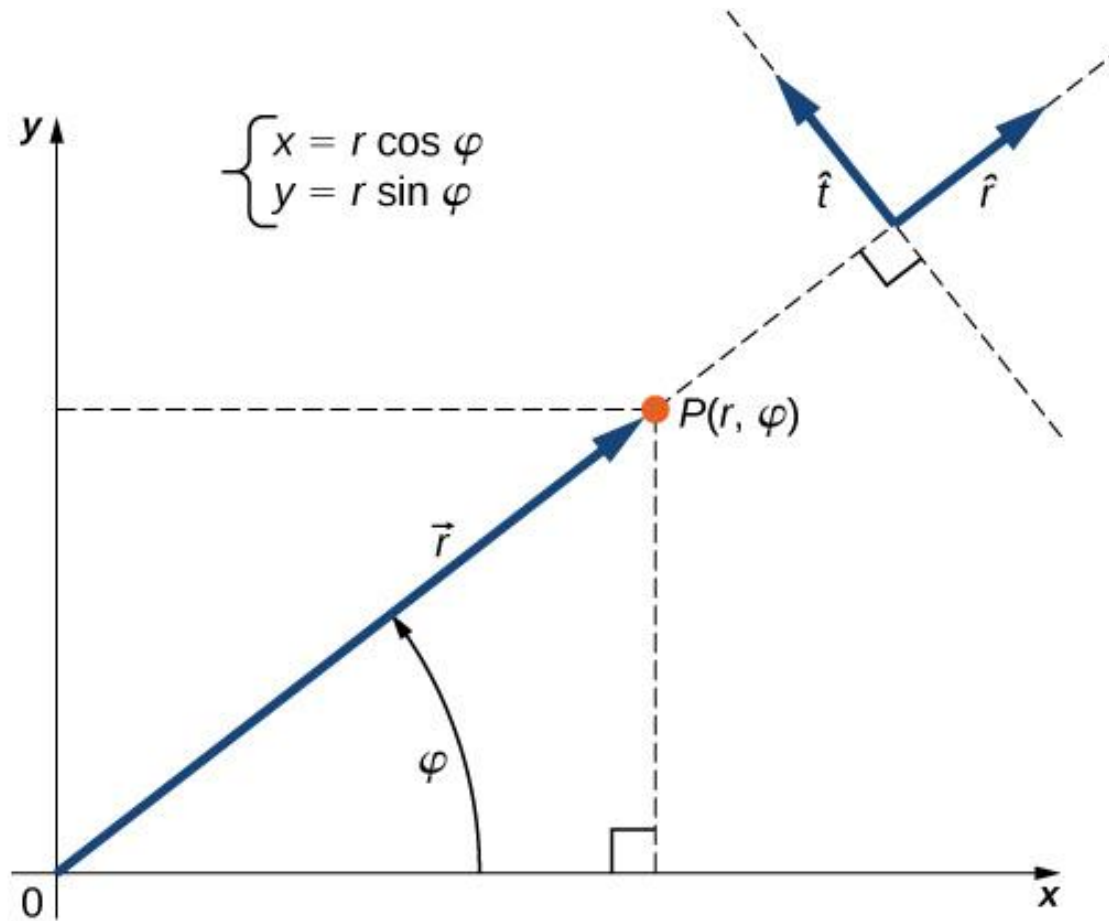
$$\begin{cases} A_x = x_k - x_p \\ A_y = y_k - y_p \end{cases}$$

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 \Leftrightarrow A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A_y}{A_x} \Rightarrow \theta = \arctan \left(\frac{A_y}{A_x} \right)$$

Rachunek wektorowy

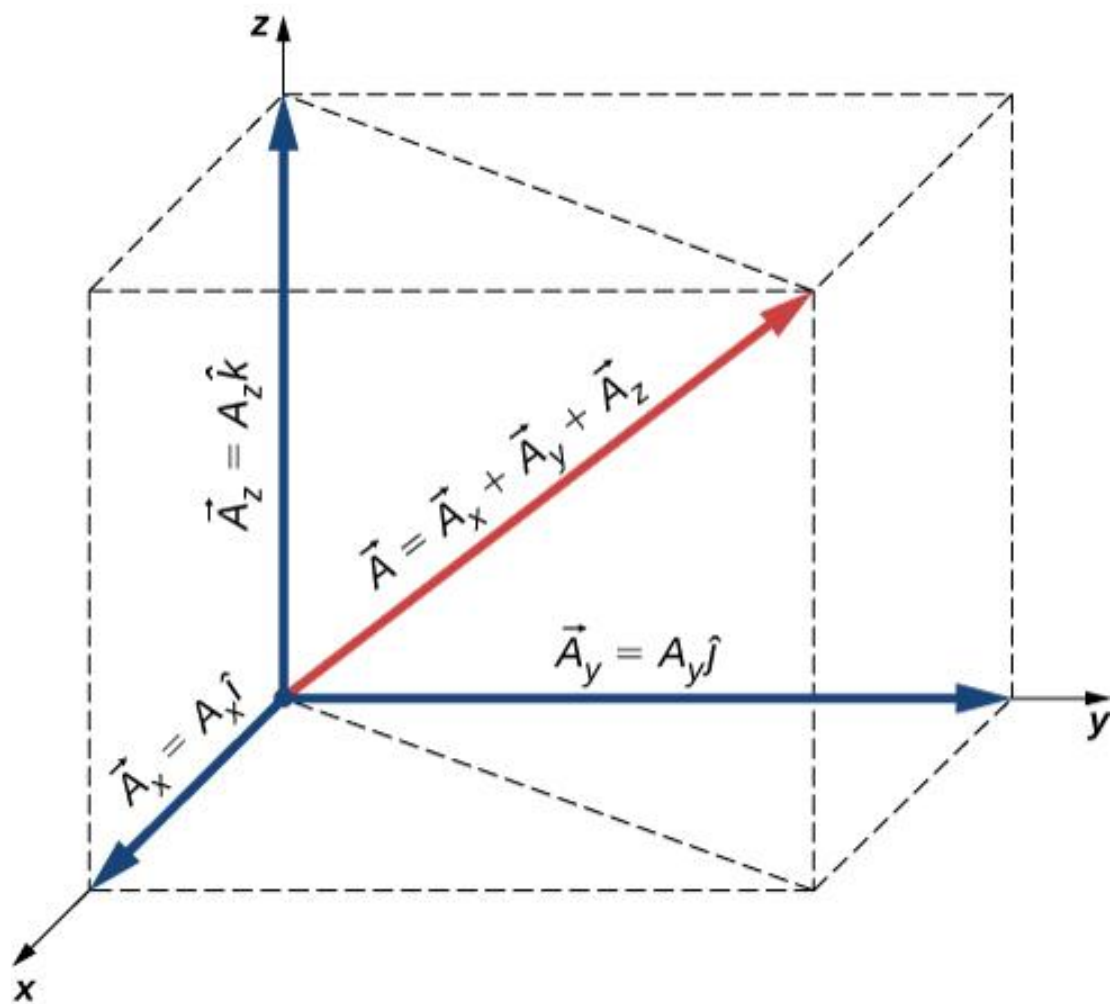
Układy współrzędnych i składowe wektora – współrzędne biegunowe



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Wektor jednostkowy $\hat{r}$ definiuje kierunek promienia wodzącego $\vec{r}$, a prostopadły do niego wektor jednostkowy $\hat{t}$ definiuje kierunek obrotu promienia o kąt φ .

Rachunek wektorowy

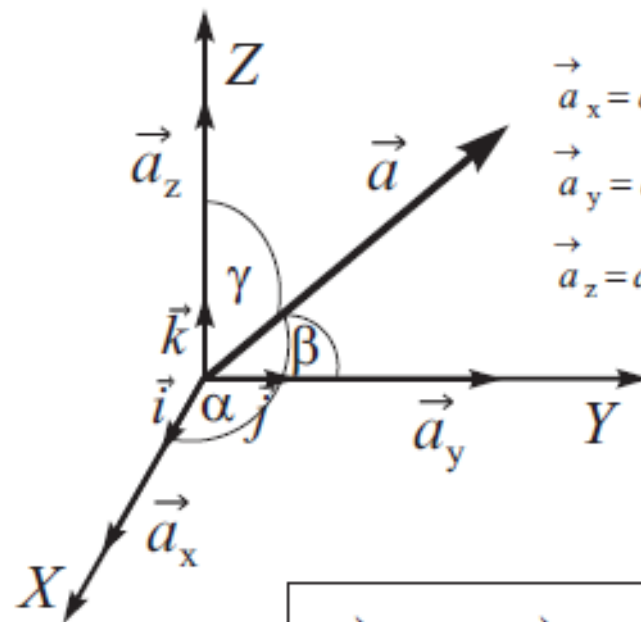


$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Rachunek wektorowy

Wektor w trójwymiarowym kartezjańskim układzie współrzędnych



$$\vec{a}_x = a \cos \alpha \vec{i}$$

$$\vec{a}_y = a \cos \beta \vec{j}$$

$$\vec{a}_z = a \cos \gamma \vec{k}$$

rzuty wektora $\vec{a}$ na kierunki osi
kartezjańskiego układu współrzędnych
(wektory składowe wektora $\vec{a}$ w
kartezjańskim układzie współrzędnych)

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

$$\vec{a} = a \cos \alpha \vec{i} + a \cos \beta \vec{j} + a \cos \gamma \vec{k} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

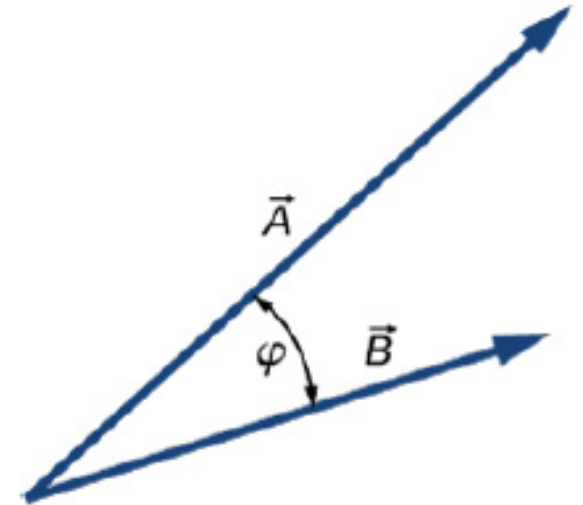
długość wektora $\vec{a}$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Rachunek wektorowy

Iloczyn skalarny wektorów

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \varphi$$



- iloczyn skalarny dwóch wektorów jest liczbą
- iloczyn skalarny wektorów o tym samym kierunku i zwrocie

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos 0^\circ = AB$$

- iloczyn skalarny dwóch wektorów o tym samym kierunku, lecz przeciwnych zwrotach

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos 180^\circ = -AB$$

- iloczyn skalarny dwóch wektorów ortogonalnych

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos 90^\circ = 0$$

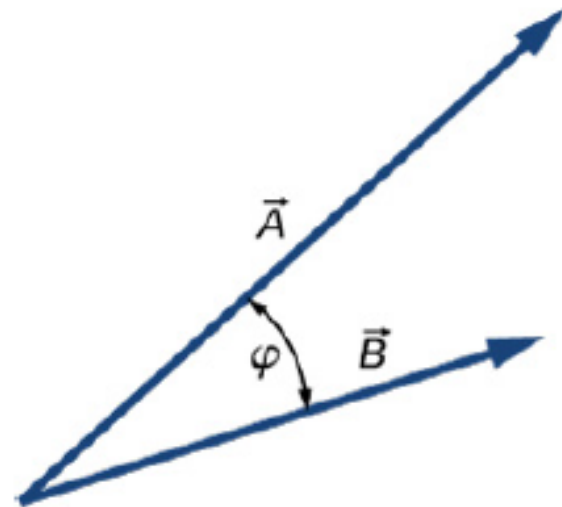
- iloczyn skalarny wektora mnożonego przez samego siebie

$$\vec{A}^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = AA \cos 0^\circ = A^2$$

Rachunek wektorowy

Iloczyn skalarny wektorów

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \varphi$$



- iloczyn skalarny jest przemienny

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

- iloczyn skalarny jest rozdzielny względem dodawania

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

Rachunek wektorowy

Iloczyn skalarny wektorów

- W układzie współrzędnych kartezjańskich iloczyn skalarny wektorów jednostkowych zawsze jest równy zero, ponieważ wektory te są do siebie prostopadłe:

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = |\hat{i}| \cdot |\hat{j}| \cdot \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0,$$

$$\hat{i} \cdot \hat{k} = |\hat{i}| \cdot |\hat{k}| \cdot \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0,$$

$$\hat{k} \cdot \hat{j} = |\hat{k}| \cdot |\hat{j}| \cdot \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

- moduły wszystkich wektorów jednostkowych są równe jeden:

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

- więc

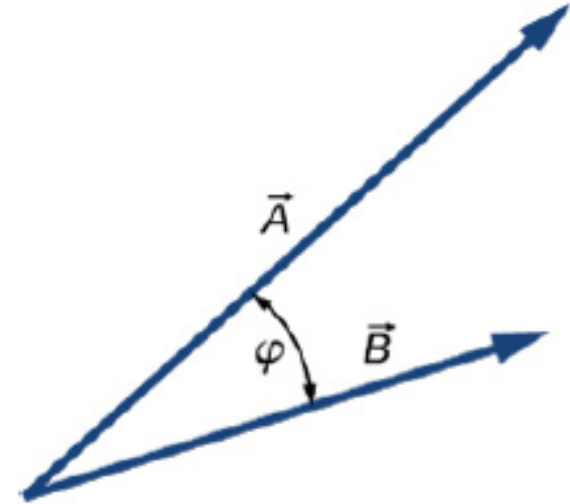
$$\hat{i} \cdot \hat{i} = i^2 = \hat{j} \cdot \hat{j} = j^2 = \hat{k} \cdot \hat{k} = k^2 = 1$$

Rachunek wektorowy

Iloczyn skalarny wektorów

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$



Obliczmy iloczyn skalarny $\vec{A} \cdot \vec{B}$ powyższych wektorów

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= A_x B_x \hat{i} \cdot \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \cdot \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \cdot \hat{k} \\ &\quad + A_y B_x \hat{j} \cdot \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \cdot \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \cdot \hat{k} \\ &\quad + A_z B_x \hat{k} \cdot \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \cdot \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \cdot \hat{k} \end{aligned}$$

Po uproszczeniu dostajemy

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Rachunek wektorowy

Iloczyn skalarny wektorów

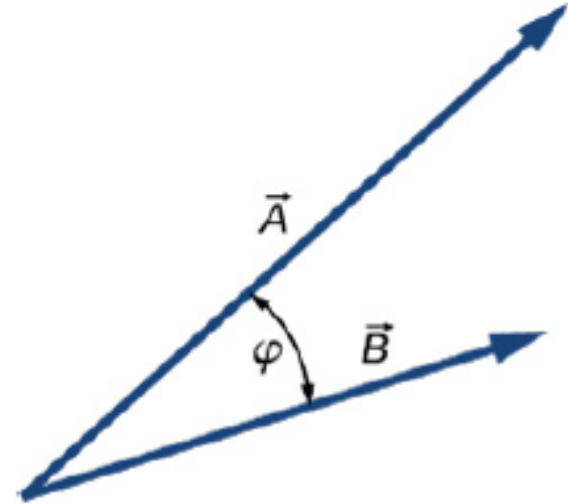
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \varphi$$

i

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

więc

$$\cos \varphi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{AB}$$



Możemy obliczyć kąt pomiędzy wektorami.

Rachunek wektorowy

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

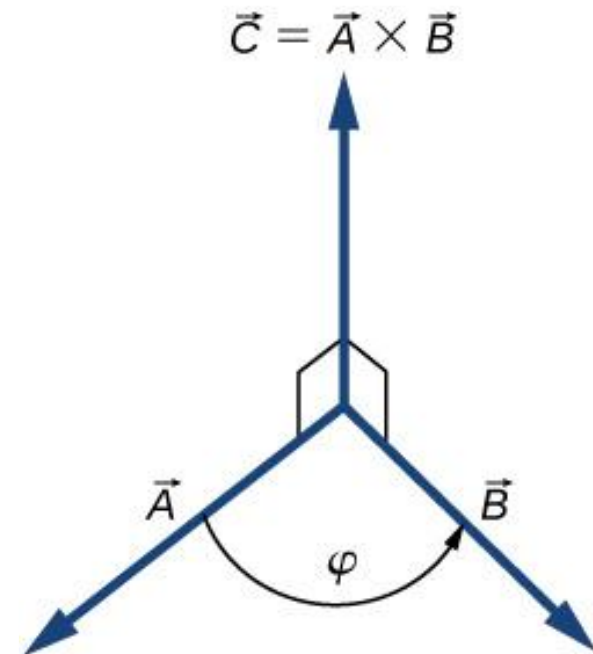
- zapisujemy

$$\vec{A} \times \vec{B}$$

- wynik jest wektorem o kierunku prostopadłym do obu wektorów - jest prostopadły do płaszczyzny, na której leżą te wektory
- Moduł iloczynu wektorowego (długość wektora wynikowego) definiuje się jako

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \varphi$$

- gdzie kąt φ między wektorami mierzy się od wektora $\vec{A}$ w kierunku wektora $\vec{B}$



Rachunek wektorowy

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

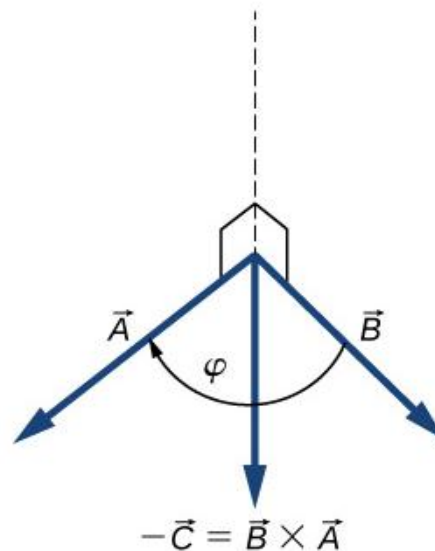
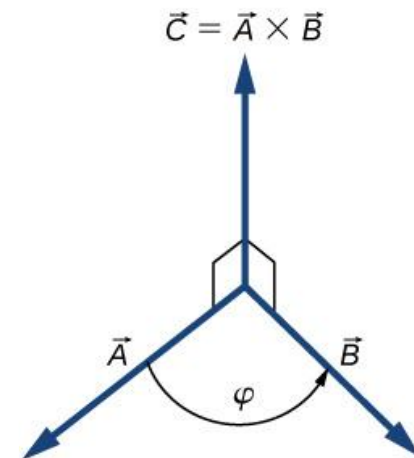
$$\vec{A} \times \vec{B}$$

- jeśli zmienimy kolejność mnożenia, to

$$\vec{B} \times \vec{A}$$

- więc

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

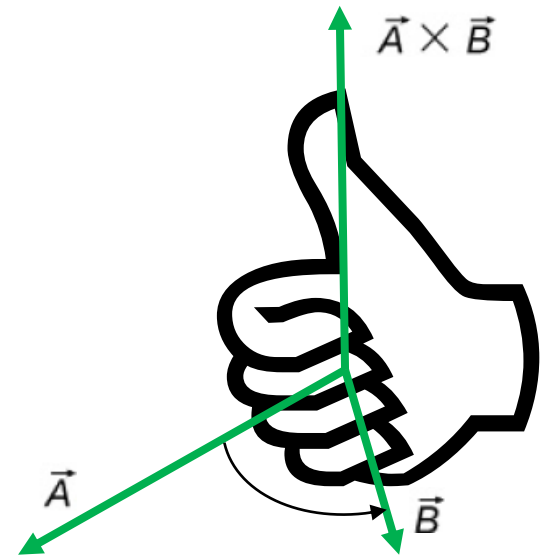
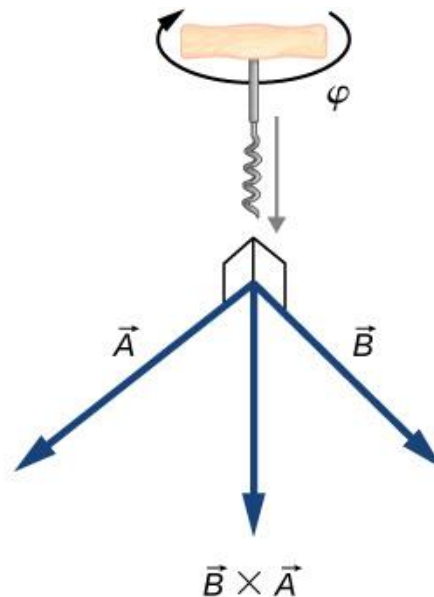
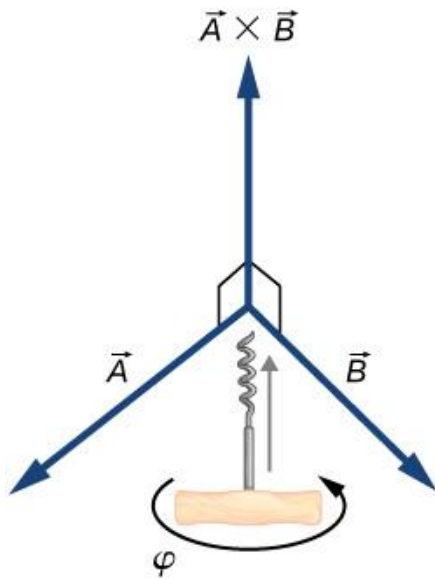


Rachunek wektorowy

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

Aby określić zwrot wektora będącego wynikiem iloczynu wektorowego stosujemy regułę:

- korkociągu, nazywaną też regułą śruby prawoskrętnej
- lub regułę prawej dłoni



Rachunek wektorowy

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

- iloczyn wektorowy jest rozdzielny względem dodawania

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

- a także

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\begin{cases} \hat{i} \times \hat{j} = +\hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{k} = +\hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{i} = +\hat{j} \end{cases}$$

Rachunek wektorowy

Iloczyn wektorowy

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

Obliczmy iloczyn wektorowy $\vec{A} \times \vec{B}$ powyższych wektorów

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$= A_x \hat{i} \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) + A_y \hat{j} \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) + A_z \hat{k} \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$= A_x B_x \hat{i} \times \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \times \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \times \hat{k}$$

$$+ A_y B_x \hat{j} \times \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \times \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \times \hat{k}$$

$$+ A_z B_x \hat{k} \times \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \times \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \times \hat{k}$$

$$= A_x B_x \cdot 0 + A_x B_y \cdot \hat{k} + A_x B_z \cdot (-\hat{j})$$

$$+ A_y B_x \cdot (-\hat{k}) + A_y B_y \cdot 0 + A_y B_z \cdot \hat{i}$$

$$+ A_z B_x \cdot \hat{j} + A_z B_y \cdot (-\hat{i}) + A_z B_z \cdot 0.$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$

Rachunek wektorowy

Iloczyn wektorowy

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} + a_x b_y \vec{k} - a_y b_x \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_z b_y \vec{i} =$$
$$= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Dziękuję za uwagę!