

Fizyka 1B

Wykład 9

dr Piotr Sitarek, prof. uczelni

Katedra Fizyki Doświadczalnej

Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej

Grawitacja

- Prawo powszechnego ciążenia
- Grawitacja przy powierzchni Ziemi
- Energia potencjalna i całkowita pola grawitacyjnego
- Orbity satelitów i ich energia
- Prawa Keplera
- Siły pływowe
- Czarne dziury

Grawitacja

- Od dawna filozofowie zastanawiali się, dlaczego ciała mają naturalną tendencję do spadania na ziemię, np.
 - Arystoteles (384–322 p.n.e.) wierzył, że z natury skała szuka Ziemi, a ogień z natury szuka niebios,
 - Brahmagupta (598~665) postulował, że Ziemia jest kulą i wszystkie ciała pozostają do niej w naturalnym powinowactwie, spadając w kierunku jej środka niezależnie od tego, gdzie się znajdują.
- Ruch Słońca, Księżycy i planet także był badany przez tysiące lat.
- Ruchy te z zadziwiającą dokładnością zostały opisane przez Ptolemeusza (100~170), którego teoria geocentryczna (wszystkie ciała niebieskie krążą wokół Ziemi) przedstawiała trajektorie planet, jako punktów krążących po mniejszych okręgach (epicyklach), których środki z kolei krążą po większych okręgach (deferentach) wokół Ziemi.
- Aż do XVII wieku brak było jednak jasnych wywodów, w których ktokolwiek powiązałby ruch ciał niebieskich z ruchem ciał spadających na Ziemię.

Grawitacja

- Mikołaj Kopernik (1473–1543) jest powszechnie uznawany za pierwszą osobę, która sprzeciwiła się geocentrycznemu systemowi Ptolemeusza, sugerując system heliocentryczny, w którym to Słońce jest w centrum Układu Słonecznego.
- Idea ta została poparta przez niesamowicie precyzyjne pomiary ruchu planet dokonane gołym okiem przez Tychona Brahe (1546–1601) oraz ich analizę przeprowadzoną przez Johanna Keplera (1571–1630) i Galileusza (1564–1642).
- Kepler pokazał, że planety poruszają się po elipsach a Robert Hooke (1635–1703) intuicyjnie zasugerował, że ruchy te wynikają z przyciągania planet przez Słońce.
- Jednak to Isaac Newton (1642–1727) powiązał przyspieszenie ciał w pobliżu powierzchni Ziemi z przyspieszeniem dośrodkowym Księżyca na orbicie okołoziemskiej.

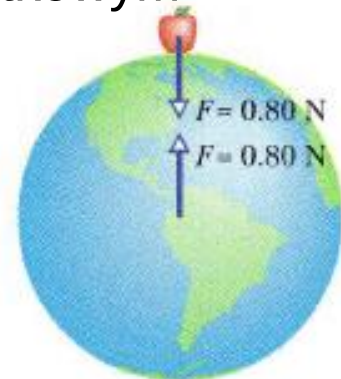
Grawitacja

Prawo powszechnego ciążenia

Newton zauważył, że ciała przy powierzchni Ziemi spadają swobodnie z przyspieszeniem g a przyspieszenie dośrodkowe Księżyca, znajdującego się w odległości około $60 R_Z$, jest około 60^2 razy mniejsze niż g . Mógł to wyjaśnić zakładając, że pomiędzy dowolnymi dwoma ciałami istnieje siła, której wartość jest proporcjonalna do iloczynu mas tych ciał, podzielonego przez kwadrat odległości między nimi.

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

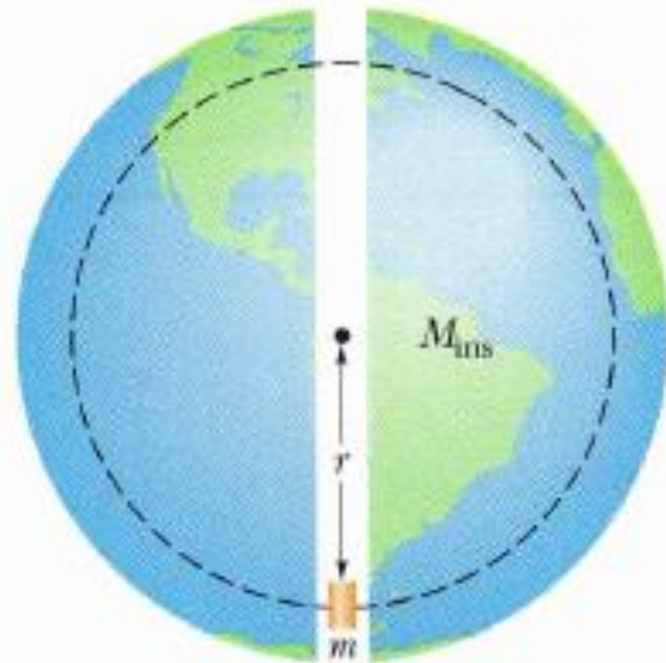
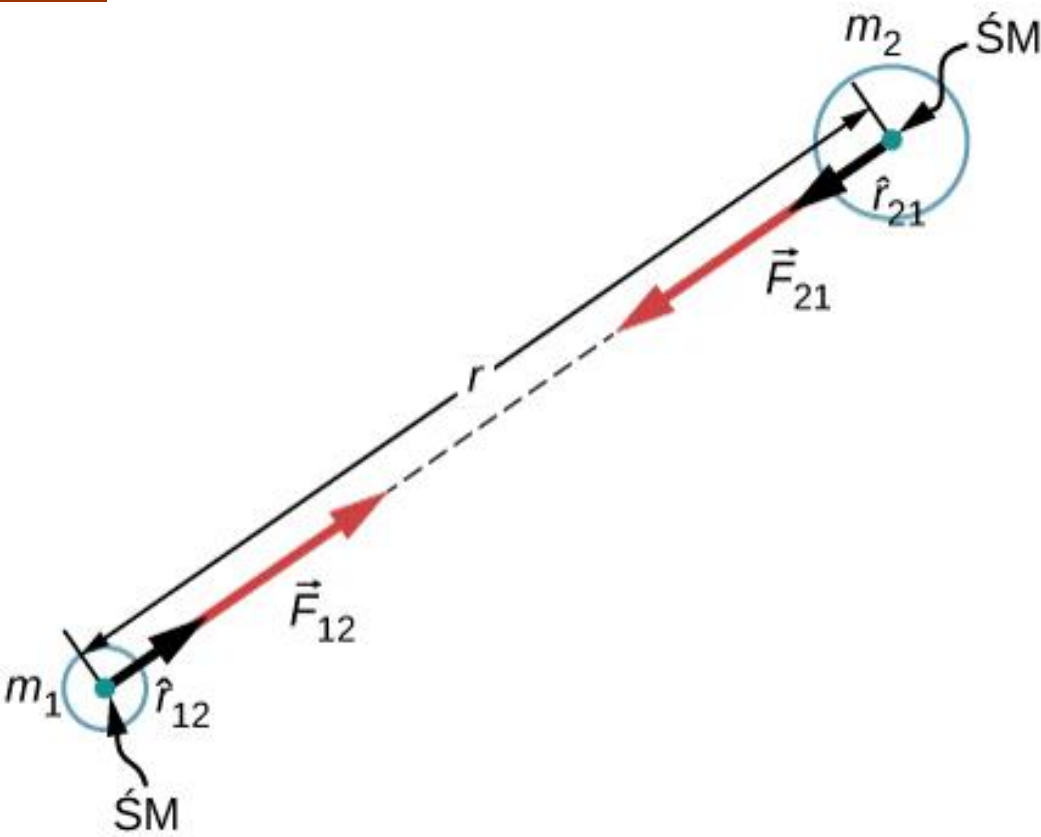
gdzie $\vec{F}_{12}$ jest siłą działającą na ciało 1 ze strony ciała 2, G jest stałą grawitacji, m_1 jest masą ciała 1, m_2 jest masą ciała 2, r jest odległością między tymi ciałami, a $\hat{r}_{12}$ jest wektorem jednostkowym o zwrocie skierowanym od ciała 1 do ciała 2.



Grawitacja

Prawo powszechnego ciążenia

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

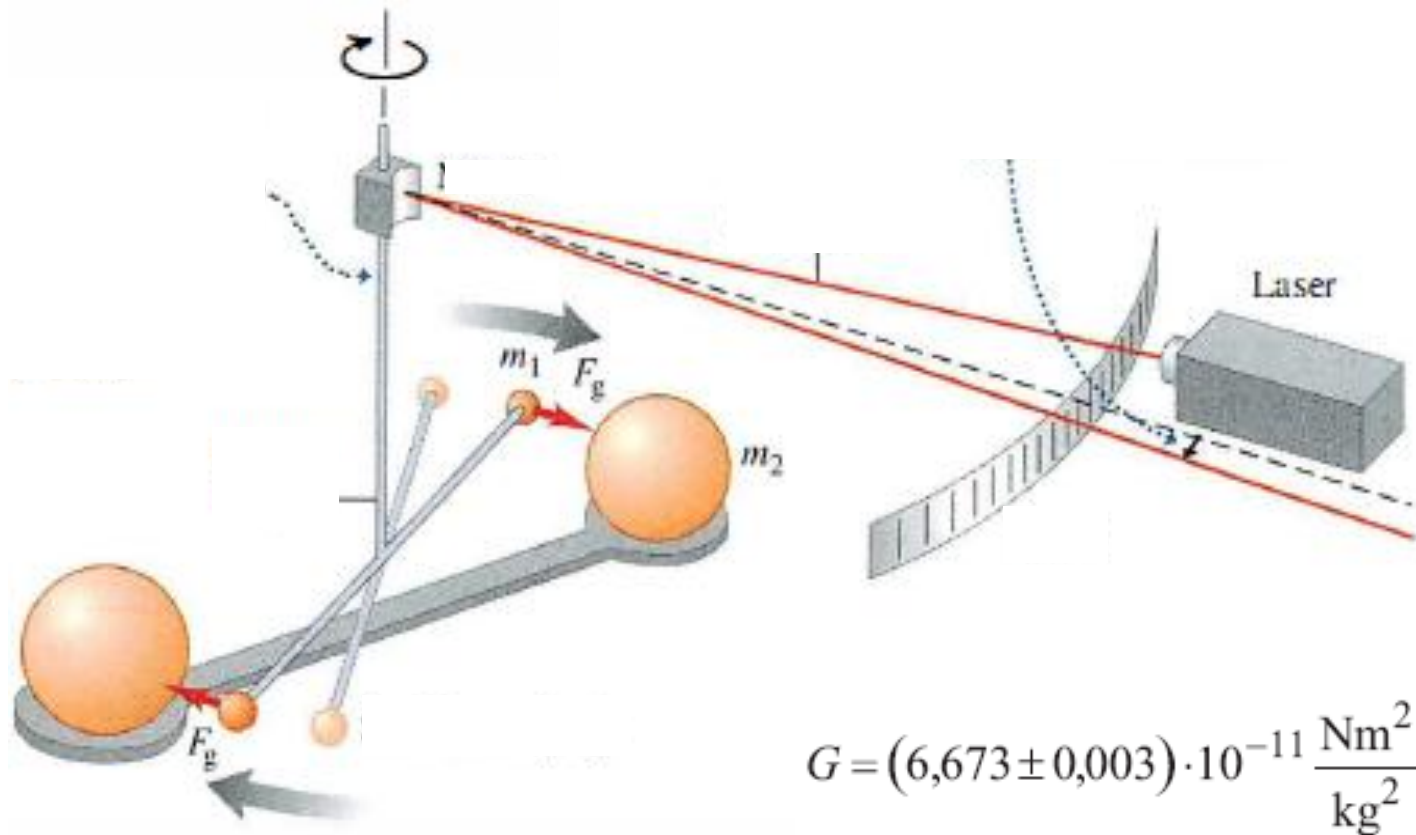


Grawitacja wewnątrz Ziemi
– twierdzenie Newtona o powłoce

Grawitacja

Wyznaczanie stałej grawitacji G - Doświadczenie Cavendisha

Prawie wiek później (1798), po tym jak Newton ogłosił prawo powszechnego ciążenia, Henry Cavendish (1731–1810) wyznaczył stałą proporcjonalności G .



Grawitacja

Wyznaczanie stałej grawitacji G - Doświadczenie Cavendisha

- Stała G nazywana jest uniwersalną stałą grawitacji,
- uważa się, iż stała ta odnosi się do wszystkich mas niezależnie od ich składu oraz że ma ona tę samą wartość w całym Wszechświecie,
- wartość stałej jest niezwykle mała, co świadczy o tym, że siła grawitacji jest bardzo słaba.
- Przykładowo dwa ciała o masie 1 kg oddalone od siebie o 1 metr oddziałują na siebie siłą $6,67 \cdot 10^{-11}$ N . Jest to ciężar typowego ziarnka pyłku kwiatowego.

Grawitacja

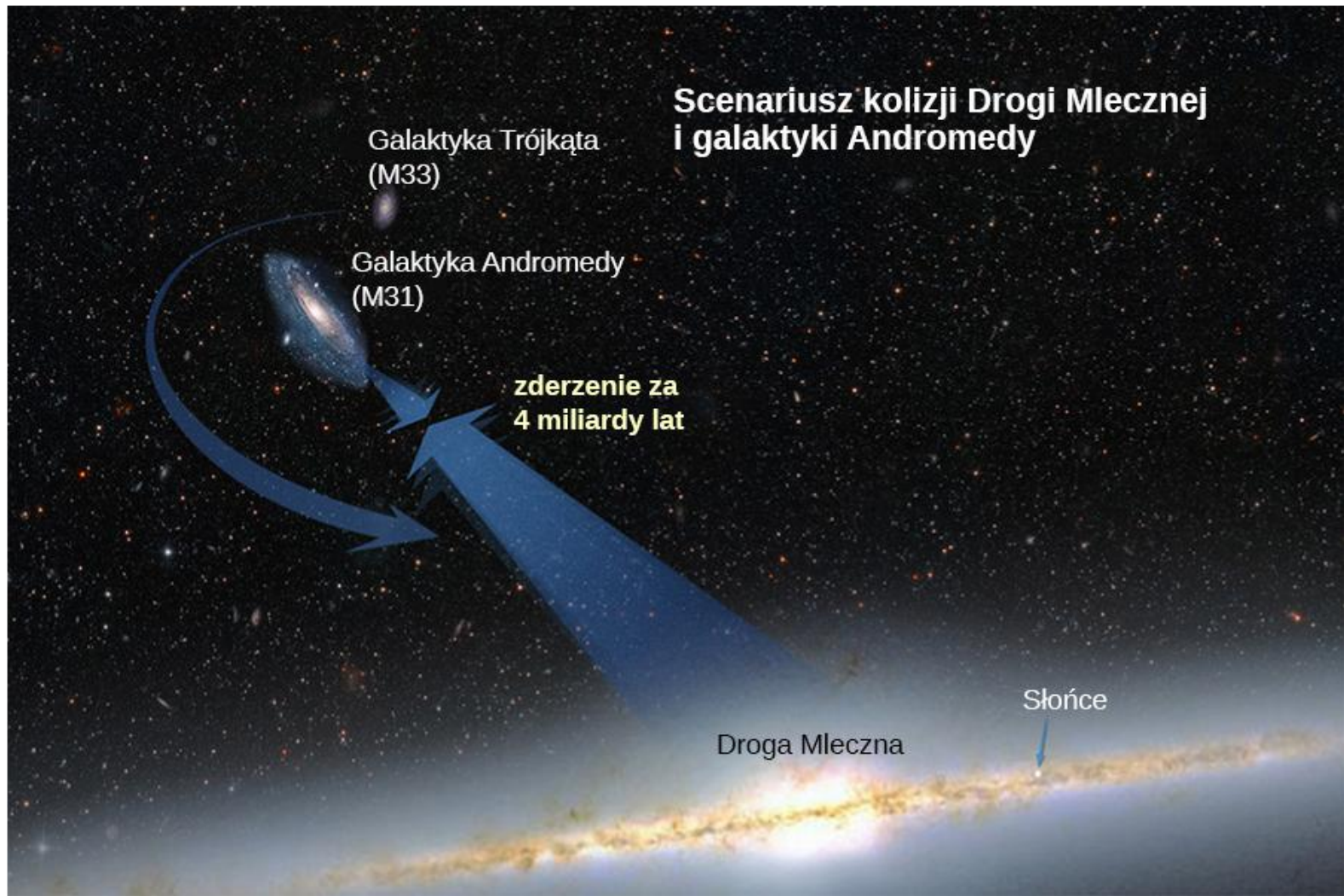
Przyciąganie grawitacyjne pomiędzy galaktykami

Wyznacz przyspieszenie naszej galaktyki, Drogi Mlecznej, wynikające z obecności najbliższej nam galaktyki o podobnych rozmiarach, galaktyki Andromedy. Przybliżona masa każdej z galaktyk wynosi 800 miliardów mas Słońca, a odległość między nimi wynosi 2,5 miliona lat świetlnych. Każda z tych galaktyk ma średnicę wynoszącą w przybliżeniu 100 000 lat świetlnych (1 rok świetlny = $9,5 \cdot 10^{15}\text{m}$).



Grawitacja

Przyciąganie grawitacyjne pomiędzy galaktykami



Grawitacja

Grawitacja przy powierzchni Ziemi

- Przypomnijmy, że przyspieszenie swobodnie spadających ciał przy powierzchni Ziemi wynosi około $9,8 \text{ m/s}^2$.
- Siła, która jest źródłem tego przyspieszenia, nazywana jest siłą ciężkości lub potocznie ciężarem ciała.
- Na podstawie drugiej zasady dynamiki Newtona ma ona wartość mg .
- Siła ta występuje niezależnie od tego, czy ciało spada swobodnie, czy nie.

Grawitacja

Grawitacja przy powierzchni Ziemi

- Porównując powyższe otrzymujemy:

$$mg = G \frac{mM_Z}{r^2}$$

- czyli

$$g = G \frac{M_Z}{r^2}$$

- Równanie to tłumaczy, dlaczego wszystkie ciała spadają na Ziemię z tym samym przyspieszeniem, niezależnie od ich masy.

Grawitacja

Grawitacja przy powierzchni Ziemi

Ile wynosi wartość na wysokości 400 km ponad powierzchnią Ziemi, na której orbituje Międzynarodowa Stacja Kosmiczna?

$$g = G \frac{M_Z}{r^2}$$

Skąd wrażenie, że kosmonauci znajdują się w stanie nieważkości?

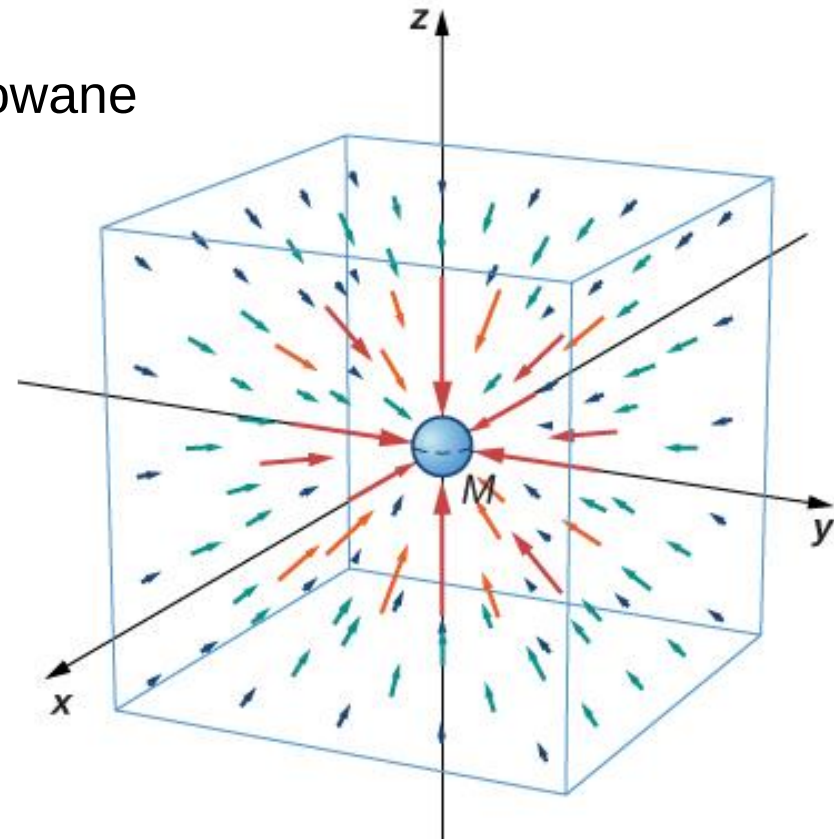
Grawitacja

Pole grawitacyjne

- można zapisać przyspieszenie w postaci wektorowej jako:

$$\vec{g} = G \frac{M}{r^2} \hat{r}.$$

- określamy wówczas pole reprezentowane przez wektor jako pole grawitacyjne, którego źródłem jest masa M .
- jest to tzw. **pole wektorowe**,
- wektor $\vec{g}$ możemy traktować jak natężenie tego pola.



Grawitacja

Pole grawitacyjne

- równanie na przyspieszenie grawitacyjne można zapisać także w postaci:

$$g = \frac{G M}{r^2} = \frac{G M}{(R + h)^2} = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}$$

Grawitacja

Pole grawitacyjne

Ponieważ Ziemia:

- nie jest jednorodna,
- nie jest kulą,
- obraca się,

przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni w różnych punktach różni się.

Zależność $g = g(h)$ dla $\varphi = 45^\circ$

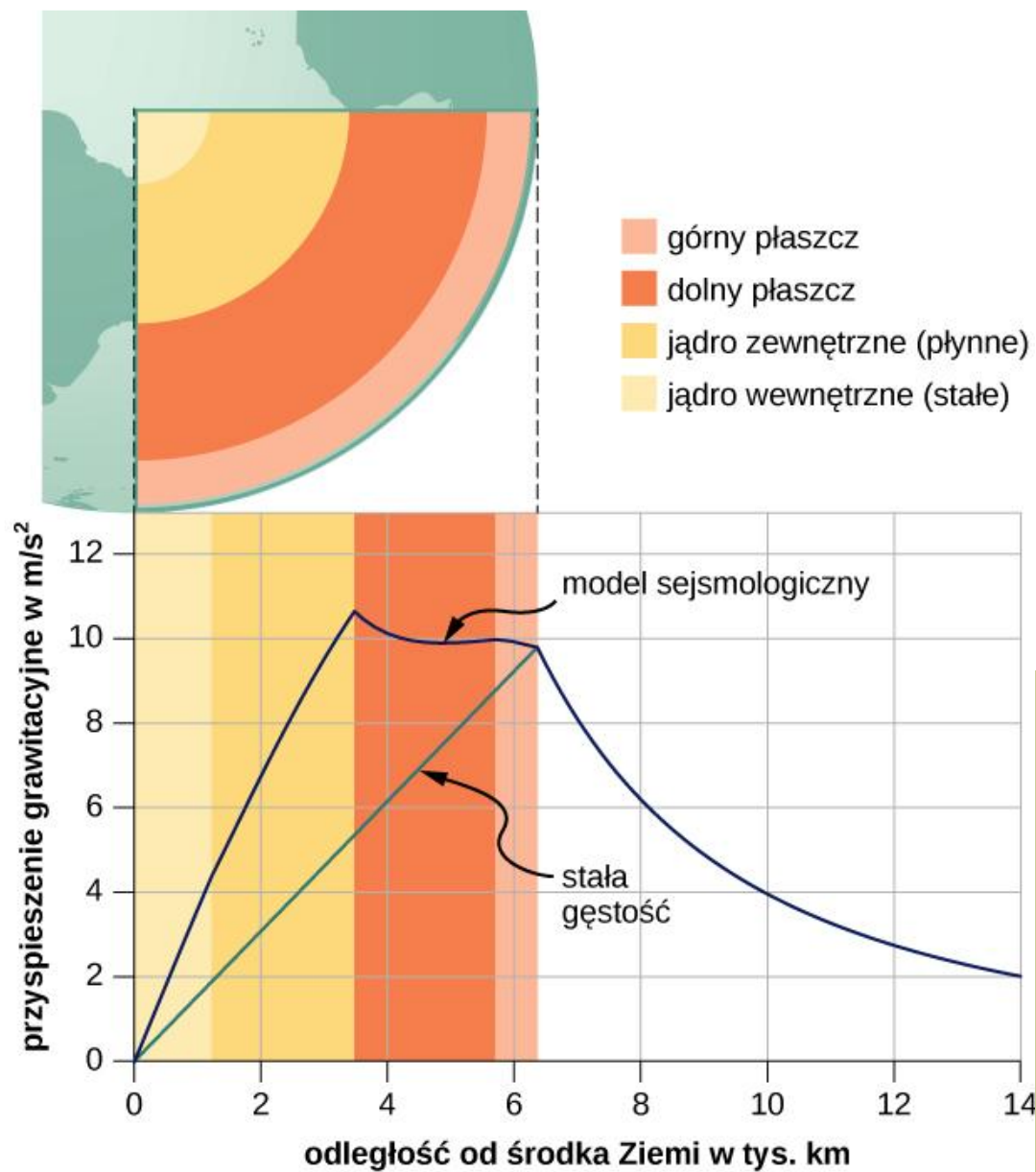
h [m]	g [m/s ²]
0	9,806
1 000	9,803
100 000	9,600
1 000 000	7,410

Zależność $g = g(\varphi)$ dla $h = 0$

φ	g [m/s ²]
0°	9,780
30°	9,793
60°	9,819
90°	9,832

Grawitacja

Pole grawitacyjne



Grawitacja

Grawitacyjna energia potencjalna ponad powierzchnią Ziemi

- pokazaliśmy, że zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej przy powierzchni Ziemi wynosi

$$\Delta U = mg(y_2 - y_1)$$

- czyli zależy tylko od zmiany wysokości nad powierzchnią ziemi – ale tylko przy założeniu, że g nie zmienia się znacznie
- korzystając z definicji pracy spróbujemy uogólnić wyrażenie na energię potencjalną

Grawitacja

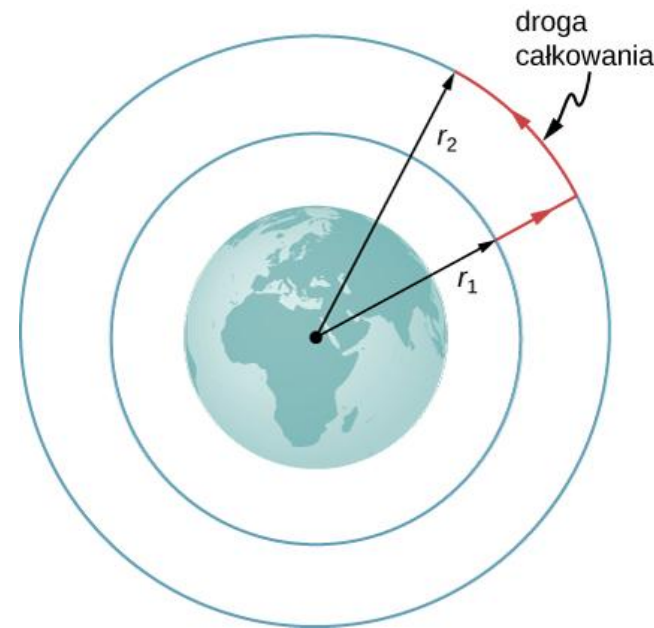
Grawitacyjna energia potencjalna ponad powierzchnią Ziemi

- zmiana energii potencjalnej wynikać będzie z pracy siły grawitacji na drodze od r_1 do r_2

$$\Delta U = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = GM_Z m \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = GM_Z m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

- czyli

$$U = - \frac{GM_Z m}{r}$$



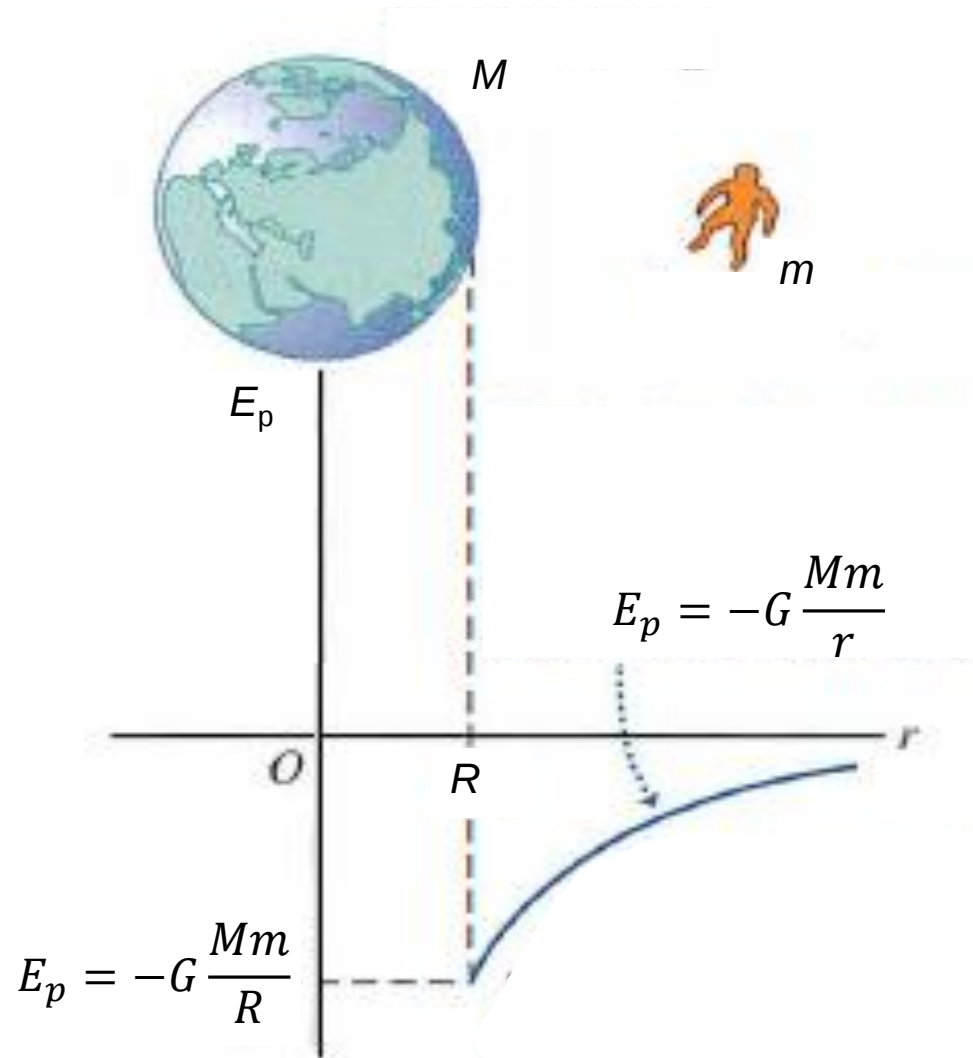
Grawitacja

Grawitacyjna energia potencjalna ponad powierzchnią Ziemi

- Energia potencjalna oddziaływania między dwoma ciałami jest równa zero, dopiero gdy ciała te znajdują się w nieskończonej odległości od siebie.
- Energia potencjalna staje się coraz bardziej ujemna, gdy ciała zbliżają się do siebie - gdy dwa ciała są odsuwane od siebie, należy wykonać pracę przeciwko sile grawitacji i w związku z tym rośnie (staje się mniej ujemne).
- Wszystkie ciała naturalnie przyciągają się ku sobie pod wpływem grawitacji w taki sposób, że energia potencjalna oddziaływania grawitacyjnego między nimi dąży do wartości minimalnej.

Grawitacja

Grawitacyjna energia potencjalna ponad powierzchnią Ziemi



Grawitacja

Grawitacyjna energia potencjalna ponad powierzchnią Ziemi

Wynoszenie ładunku na orbitę

Ile energii trzeba zużyć, aby wynieść statek Sojuz o masie 9000 kg z powierzchni Ziemi na wysokość 400 km, by mógł on dostarczyć niezbędne wyposażenie na Międzynarodową Stację Kosmiczną?

Grawitacja

Zasada zachowania energii

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2}$$

Grawitacja

Zasada zachowania energii - prędkość ucieczki

Prędkość ucieczki lub inaczej **druga prędkość kosmiczna** jest definiowana jako minimalna prędkość początkowa ciała, jaka jest potrzebna, by przestało ono oddziaływać grawitacyjnie z daną planetą, czyli by uciekło z jej powierzchni i nigdy nie powróciło.

$$\frac{1}{2}mv_u^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{GMm}{\infty} \rightarrow 0$$

$$v_u = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$v_u = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6,37 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 1,12 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Pole grawitacyjne

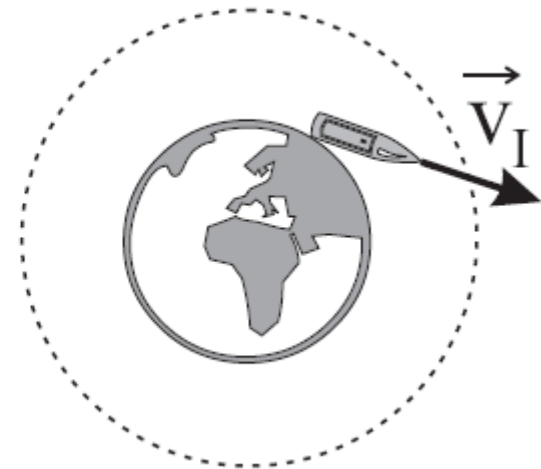
Pierwsza prędkość kosmiczna

$$G \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Dla Ziemi

$$v_I = \sqrt{\frac{G M_Z}{R_Z}} = 7,9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

pierwsza prędkość kosmiczna



- dla Księżyca: $v_I = 1,68 \text{ km/s}$
- dla Słońca: $v_I = 437 \text{ km/s}$

Pole grawitacyjne

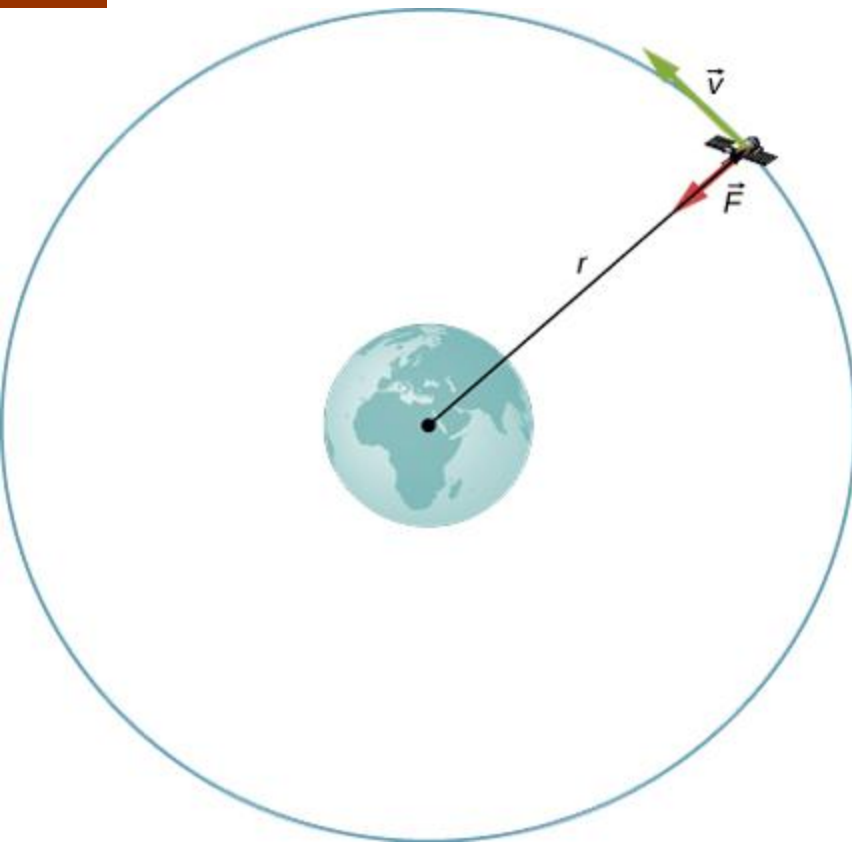
Orbity satelitów i ich energia - orbity kołowe

- Mikołaj Kopernik pierwszy zasugerował, że Ziemia i wszystkie pozostałe planety krążą wokół Słońca po okręgu.
- Zauważył także, że okres obiegu po orbicie zwiększa się wraz z odległością od Słońca.
- Późniejsza analiza przeprowadzona przez Keplera wykazała, że orbity te są w rzeczywistości eliptyczne.
- Orbity większości planet w Układzie Słonecznym są prawie okrągłe, np. odległość orbity Ziemi od Słońca zmienia się zaledwie o 2% (dla Merkurego jest to prawie 40%).

Pole grawitacyjne

Orbity satelitów i ich energia - orbity kołowe

- Rozważmy satelitę o masie m , który znajduje się na orbicie kołowej wokół Ziemi w odległości r od jej środka



$$\frac{GmM_Z}{r^2} = ma_d = \frac{mv_{\text{orb}}^2}{r}$$

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{GM_Z}{r}}$$

$\swarrow$
 v_I

Międzynarodowa Stacja
Kosmiczna

$$7,67 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_Z}}$$

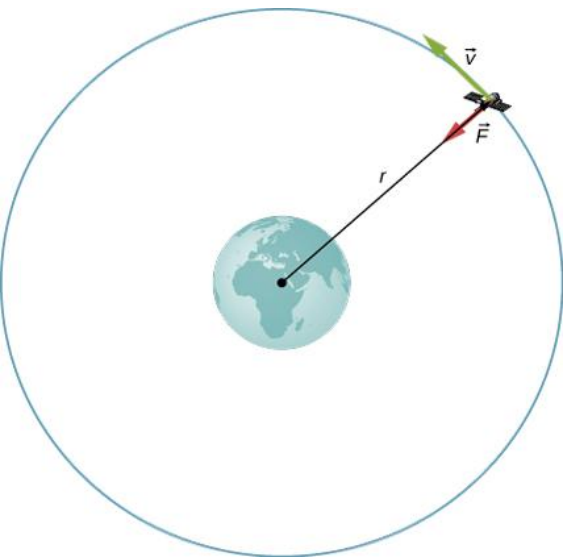
$$5,55 \cdot 10^3 \text{ s}$$

Pole grawitacyjne

Orbity satelitów i ich energia - energia na orbitach kołowych

- Rozważmy satelitę o masie m , który znajduje się na orbicie kołowej wokół Ziemi w odległości r od jej środka

$$\frac{GmM_Z}{r^2} = ma_d = \frac{mv^2}{r} \quad \frac{GmM_Z}{r} = mv^2 \quad E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM_Z}{2r}$$



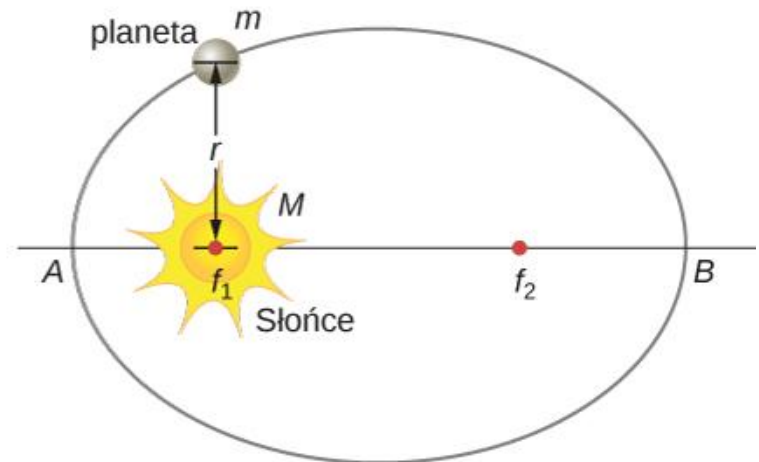
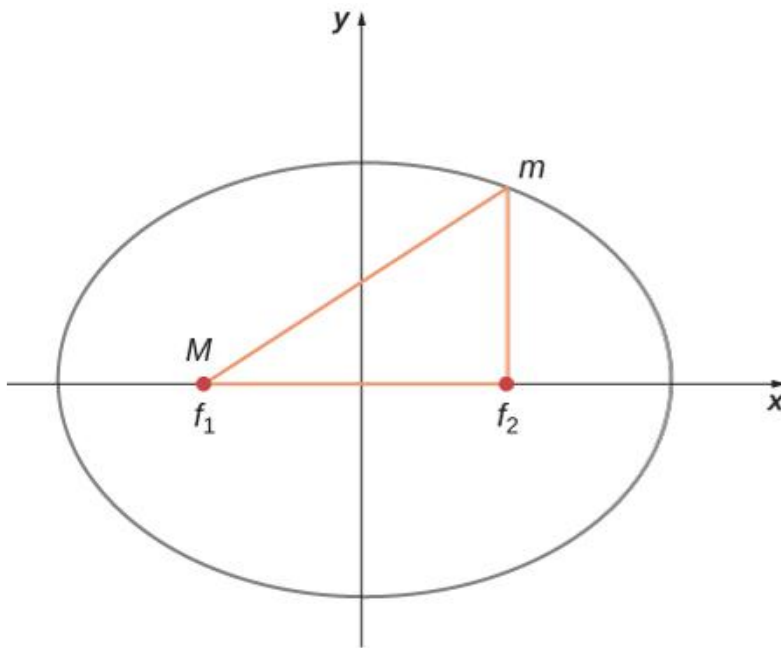
$$E = E_K + U = \frac{GmM_Z}{2r} - \frac{GmM_Z}{r} = -\frac{GmM_Z}{2r}$$

Pole grawitacyjne

Prawa Keplera - pierwsze prawo

Pierwsze prawo Keplera stwierdza, że każda planeta porusza się po elipsie, a Słońce znajduje się w jednym z ognisk tej elipsy.

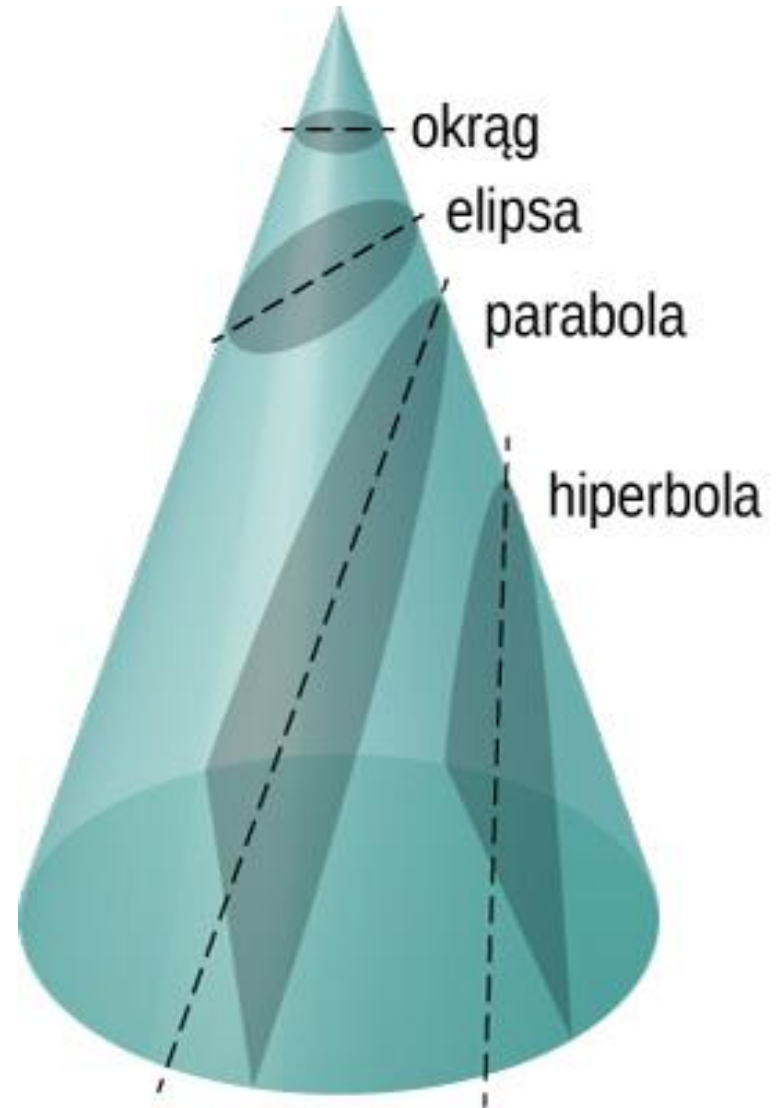
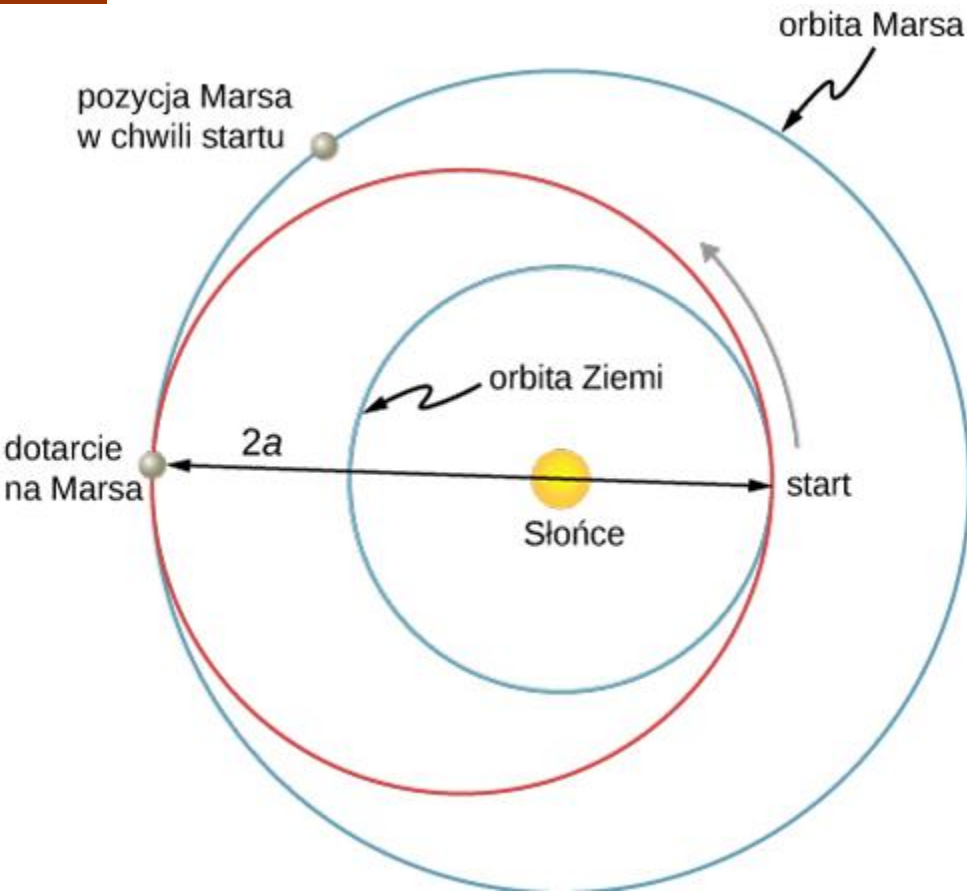
- punkt A – peryhelium, punkt B – aphelium
- w przypadku Księżyca, odpowiednio: perygeum i apogeum



Pole grawitacyjne

Prawa Keplera - pierwsze prawo

możliwe krzywe stożkowe



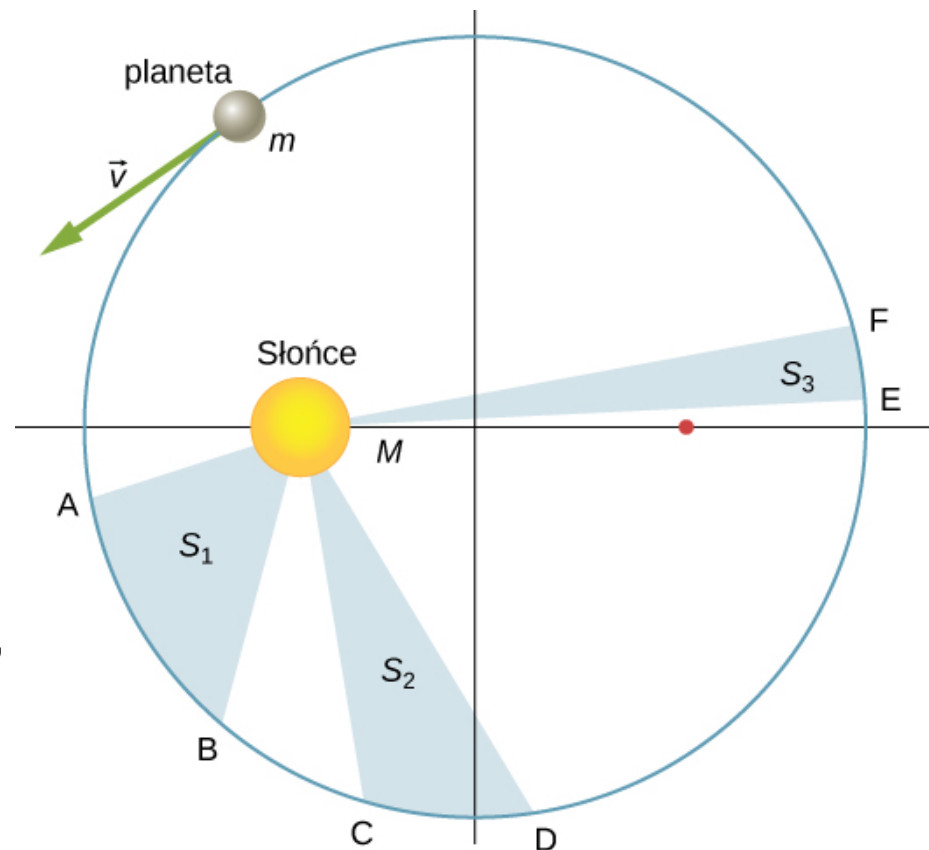
Pole grawitacyjne

Prawa Keplera - drugie prawo

Drugie prawo Keplera mówi, że prędkość polowa planety na orbicie jest stała. Prędkość polową planety definiujemy jako stosunek pola powierzchni zakreślonego przez promień wodzący planety do czasu, w którym planeta przebywa, odpowiadającą temu polu odległość po orbicie.

$$S_1 = S_2 = S_3$$

Drugie prawo Keplera jest przede wszystkim konsekwencją zasady zachowania momentu pędu, która odnosi się do dowolnego układu, w którym występują jedynie siły grawitacyjne działające wzdłuż promienia wodzącego.



Pole grawitacyjne

Prawa Keplera - trzecie prawo

Trzecie prawo Keplera mówi, że kwadrat okresu obiegu planety jest proporcjonalny do sześciannu wielkiej półosi jej orbity.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

Dla orbity kołowej, jak pokazaliśmy wcześniej:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_Z}}$$

Pole grawitacyjne

Pływy księżycowe

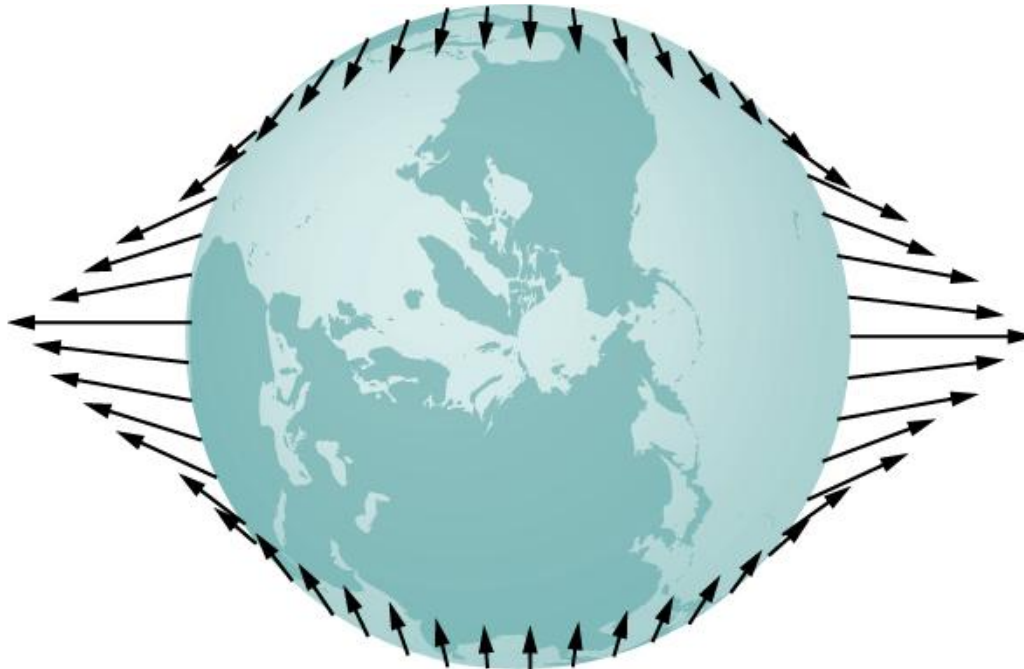
Mieszkańcy niemal dowolnego wybrzeża oceanicznego na świecie mogą dwa razy dziennie obserwować podnoszenie się i opadanie poziomu wody. Jest to spowodowane obrotem Ziemi wokół własnej osi, połączonym z przyciąganiem grawitacyjnym zarówno Księżyca, jak i Słońca.



Pole grawitacyjne

Pływy księżycowe

Wypadkowa siła grawitacji powoduje, że Ziemia i Księżyc krążą wokół ich wspólnego środka masy. Leży on w odległości około 1600 km pod powierzchnią Ziemi, wzdłuż prostej łączącej te dwa ciała. Siła pływowa może być postrzegana jako różnica między siłą grawitacji w środku Ziemi i w każdym innym jej punkcie.



Pole grawitacyjne

Wpływ Słońca na pływy oceaniczne

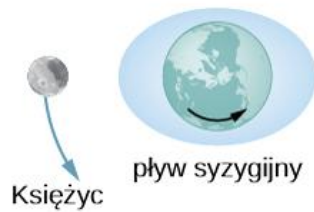
- Oprócz sił pływowych pochodzących od grawitacji Księżyca, wpływ na poziom wody w ziemskich oceanach wywiera także siła grawitacji Słońca.
- Przyciąganie grawitacyjne Słońca działające na dowolne ciało na Ziemi jest prawie 200 razy większe od przyciągania Księżyca.
- Jednak wpływ Słońca na pływy morskie, pomimo że jest znaczący, to jest jednak mniejszy niż Księżyca.
- W zależności od pozycji Księżyca i Słońca względem Ziemi, wypadkowa siła pływowa może być wzmocniona lub osłabiona.

Pole grawitacyjne

Wpływ Słońca na pływy oceaniczne



(a)



(b)



(c)



Pole grawitacyjne

Teoria grawitacji Einsteina

- W 1905 roku Albert Einstein (1879–1955) opublikował **szczególną teorię względności**.
- W teorii tej, prędkość żadnego ciała nie może przekroczyć prędkości światła — jest ona swoistym ograniczeniem prędkości w całym Wszechświecie.
- Niesie on jednak ze sobą fundamentalne konsekwencje — **przestrzeń i czas nie są absolutne**.
 - dwie osoby poruszające się względem siebie nie zgadzają się co do wyniku pomiaru długości poruszających się obiektów oraz upływającego czasu.
- Prawie wszystkie prawa mechaniki zaczynają zawodzić, gdy prędkość ciała zbliża się do prędkości światła.

Pole grawitacyjne

Teoria grawitacji Einsteina

- zakładaliśmy, że:
 - grawitacja jest siłą działającą na odległość - bez kontaktu fizycznego, każda zmiana położenia jednego ciała jest natychmiastowo przekazywana do wszystkich innych ciał
 - masy występujące w tym prawie są dokładnie takie same, jak te stosowane w drugiej zasadzie dynamiki Newtona
- W **ogólnej teorii względności** (1916 r.) Einstein rozwiązał oba te problemy.
- Jego teoria opisuje geometrię czasoprzestrzeni oraz to, jak masa (i przyspieszenie) oddziałują z czasoprzestrzenią i jak ją zakłócają.

Pole grawitacyjne

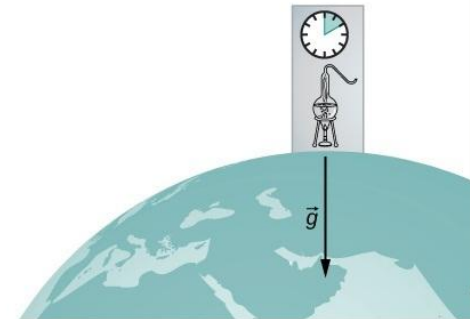
Teoria grawitacji Einsteina - Zasada równoważności

- dlaczego ktoś, kto spada swobodnie nie czuje swojej wagi (mówi się, że astronauta na orbicie Ziemi są w stanie nieważkości pomimo faktu, że grawitacja Ziemi jest tam wciąż stosunkowo silna)?
- W ogólnej teorii względności Einsteina nie ma żadnej różnicy pomiędzy spadkiem swobodnym i przebywaniem w stanie nieważkości - jest to tak zwana **zasada równoważności**.
- Następstwem tej zasady jest fakt, że nie ma różnicy między jednorodnym polem grawitacyjnym i jednostajnym przyspieszeniem w przypadku braku grawitacji.

Pole grawitacyjne

Teoria grawitacji Einsteina - Zasada równoważności

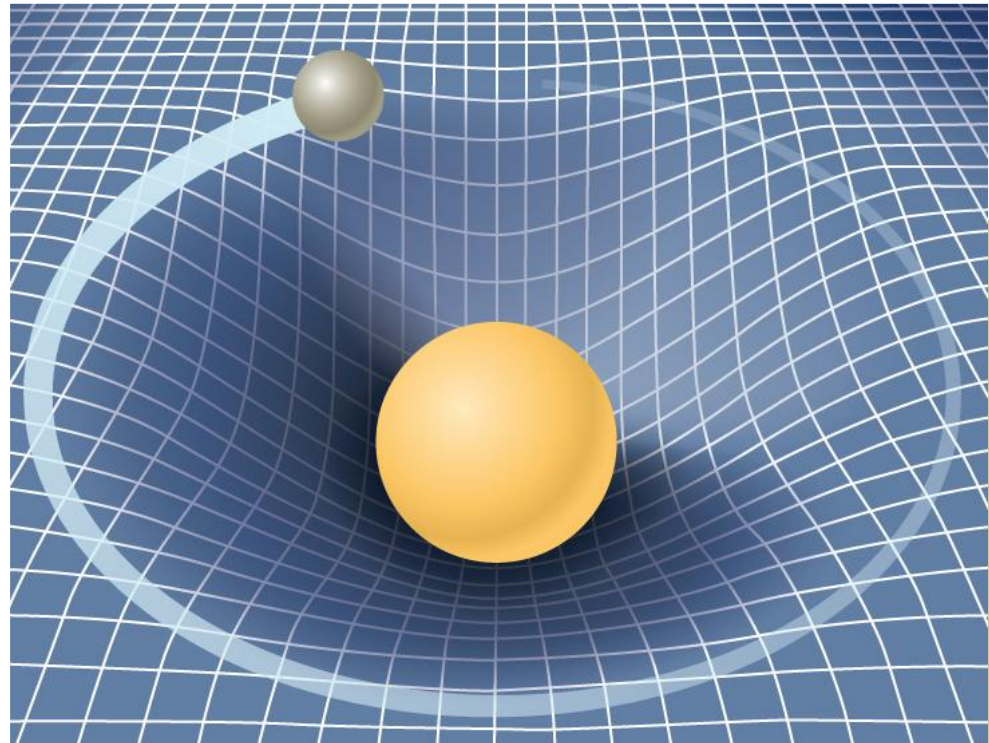
- Jak to możliwe, że te dwie pozornie zasadniczo różne sytuacje są takie same?
- Odpowiedź wynika z faktu, że grawitacja nie jest siłą działającą między dwoma ciałami, lecz jest wynikiem oddziaływania każdego ciała z efektami, jakie inne ciała wywierają na czasoprzestrzeń go otaczającą.
- Jednorodne pole grawitacyjne i ruch jednostajnie przyspieszony mają dokładnie taki sam wpływ na czasoprzestrzeń.



Pole grawitacyjne

Teoria grawitacji Einsteina

- Tylko pusta przestrzeń jest płaska.
- Obecność masy — lub energii, gdyż teoria względności nie odróżnia tych dwóch wielkości, zakrzywia czas i przestrzeń, czyli czasoprzestrzeń wokół niej.
- Ruch każdego innego ciała posiadającego masę jest po prostu reakcją na zakrzywienie czasoprzestrzeni.



Pole grawitacyjne

Prędkość ucieczki ze Słońca

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 6,2 \cdot 10^5 \text{ m/s} \approx \frac{c}{500}$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} R \sqrt{\rho}$$

Nietrudno wyobrazić sobie ciało, dla którego iloczyn $R\sqrt{\rho}$ będzie odpowiednio duży tak, że $v > c$.

Dla takiego ciała nic, nawet światło, nie będzie mogło opuścić jego pola grawitacyjnego. Ciało o takich własnościach nazwano **czarną dziurą**.

Pole grawitacyjne

Czasoprzestrzeń – czarne dziury

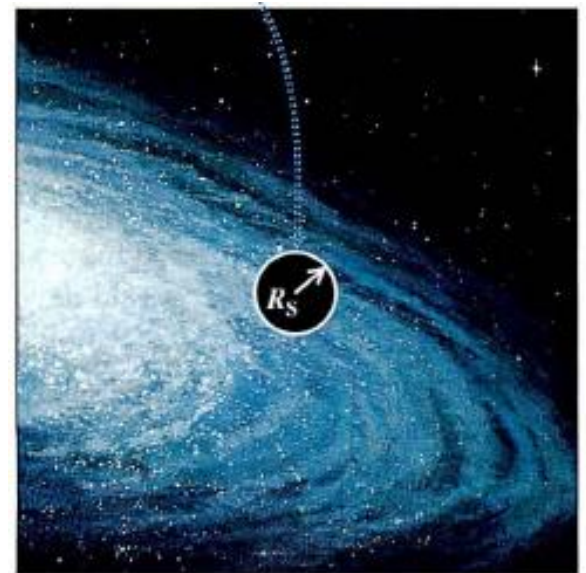
- Teoria grawitacji Einsteina jest wyrażona jednym pozornie prosto wyglądającym równaniem tensorowym, które mówi, w jaki sposób masa zakrzywia czasoprzestrzeń wokół niej.
- Jedno z rozwiązań tego równania prowadzi do jednego z najbardziej fascynujących przewidywań tej teorii: istnienia **czarnej dziury**.
- Powstanie czarnych dziur polega na tym, że jeśli dany obiekt jest wystarczająco gęsty, to zapada się pod wpływem własnej grawitacji i jest otoczony horyzontem zdarzeń (ang. event horizon).
- Cokolwiek znajdzie się w jego wnętrzu, nie może uciec spod wpływu przyciągania grawitacyjnego czarnej dziury.

Czarne dziury

Promień graniczny (tyko światło może opuścić dane ciało) nazwano **promieniem Schwarzschild'a**

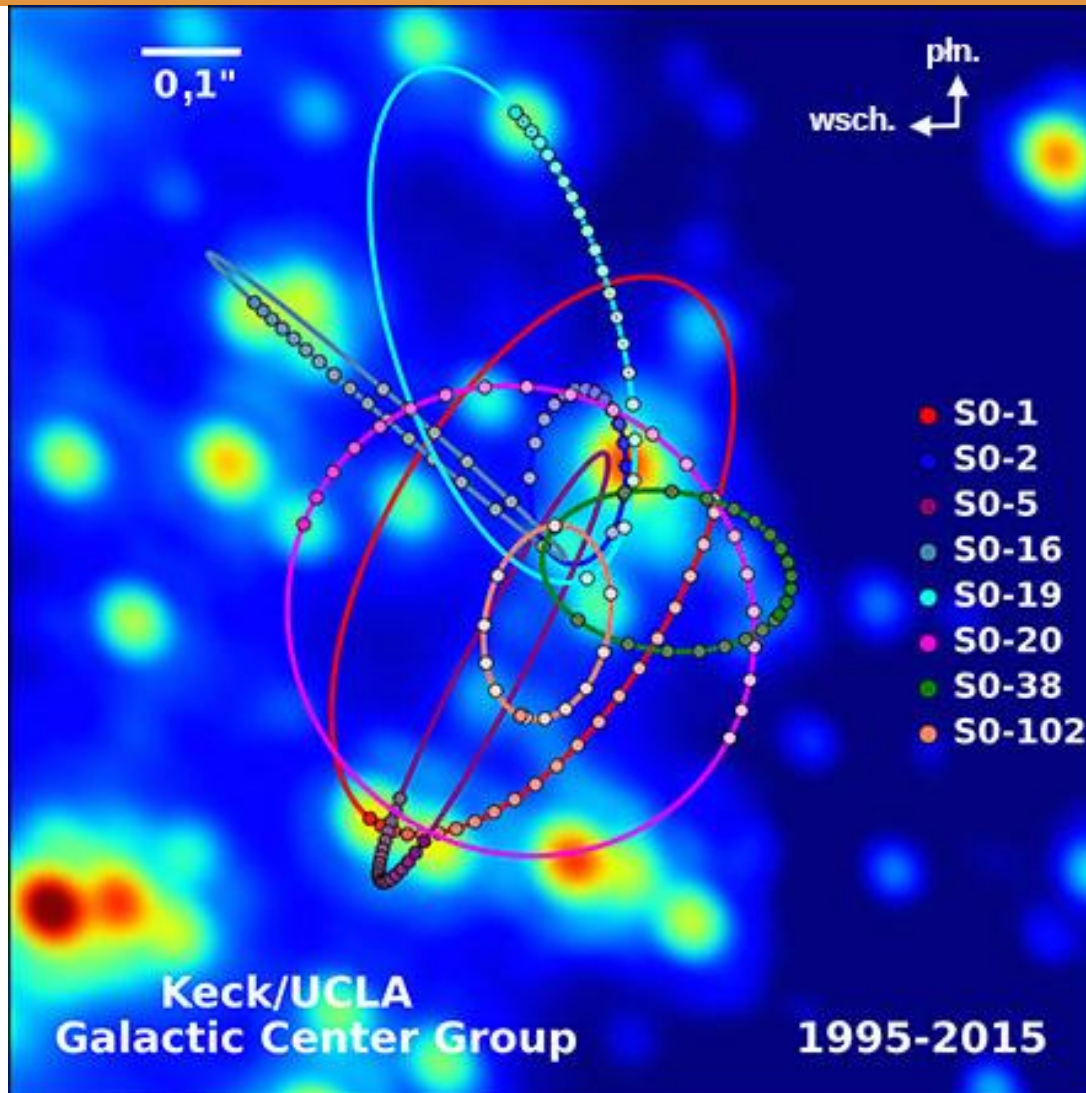
$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Sfera o promieniu R_s otaczająca czarną dziurę nosi nazwę horyzontu zdarzeń.



Zmiana długości fali światła w kierunku fal dłuższych.

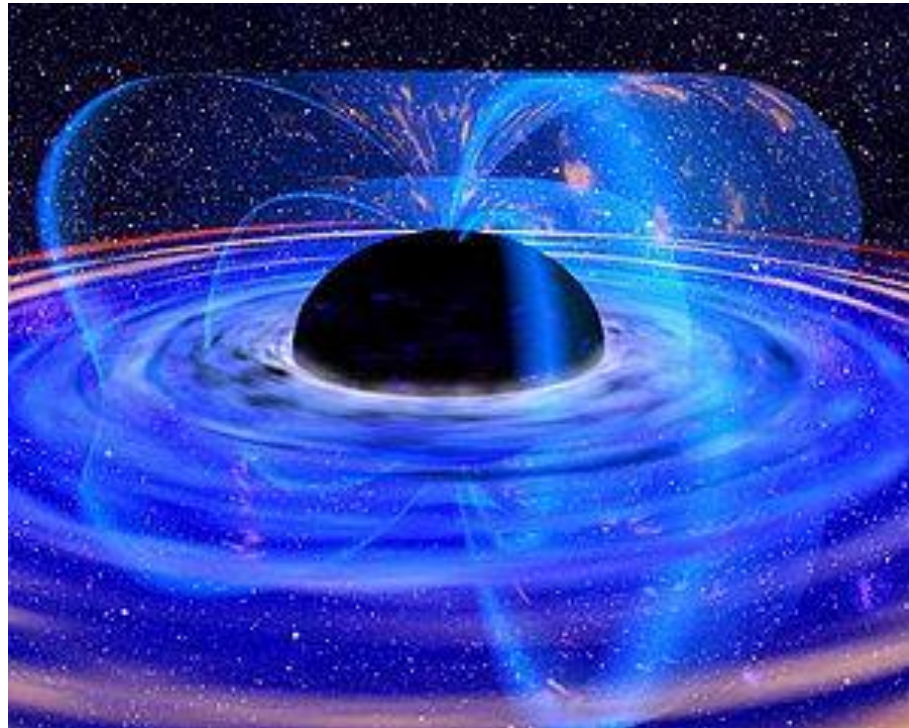
Czarne dziury



Trajektorie gwiazd krążących wokół masy znajdującej się w centrum Drogi Mlecznej. Na podstawie ich ruchu szacuje się, że czarna dziura w centrum galaktyki ma masę równą około 4 milionom mas Słońca.

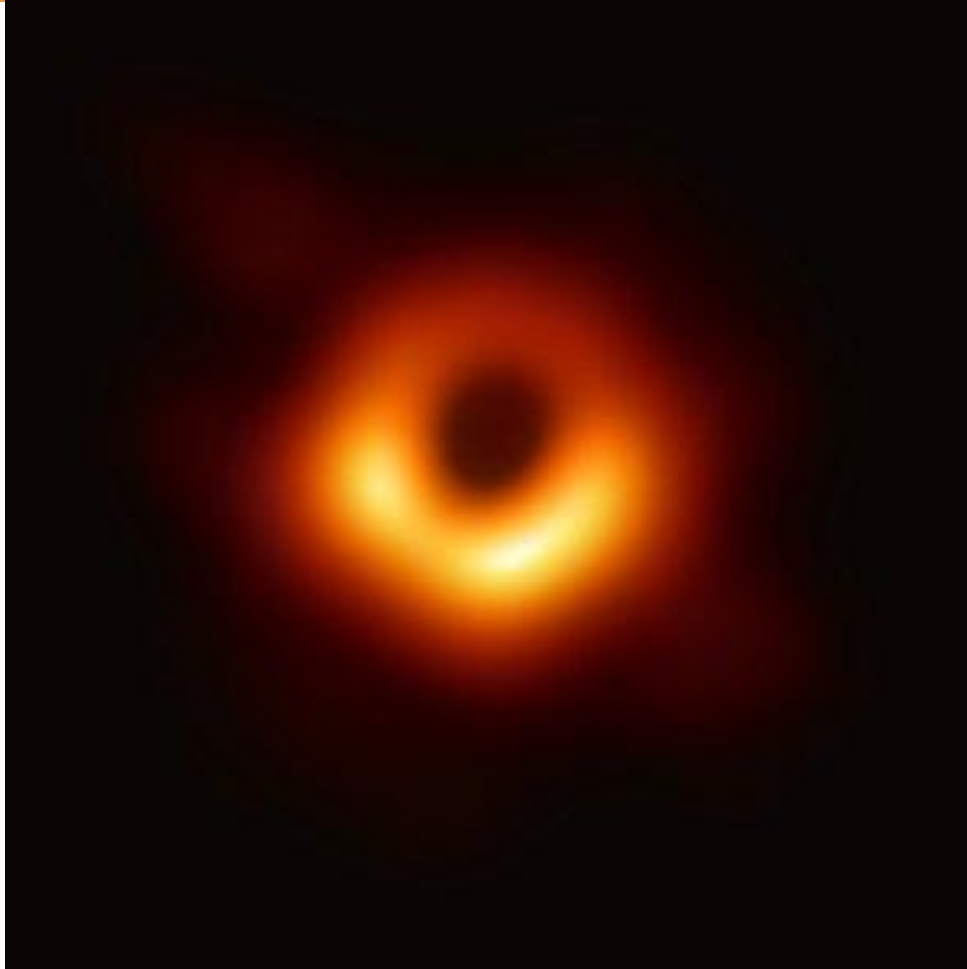
Czarne dziury

dżety



Dysk akreacyjny

Czarne dziury



10 IV 2019 roku astronomowie z międzynarodowego projektu Event Horizon Telescope zaprezentowali pierwsze na świecie zdjęcie czarnej dziury. Supermasywna czarna dziura znajduje się w centrum galaktyki M87 oddalonej o 55 mln lat świetlnych od Ziemi.

Pomimo jej dużych rozmiarów żaden pojedynczy teleskop nie byłby stanie wykonać takiego zdjęcia, dlatego wykorzystano do tego 8 radioteleskopów rozmieszczonych w różnych miejscach na całej planecie.

Dziękuję za uwagę!