

Fizyka 1B

Wykład 6

dr Piotr Sitarek, prof. uczelni

Katedra Fizyki Doświadczalnej

Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej

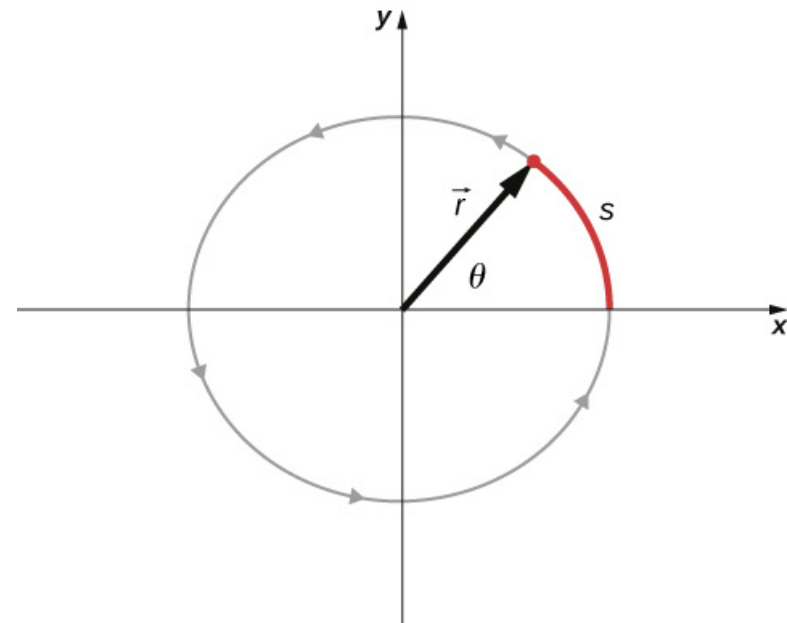
Ruch obrotowy

- Obroty ze stałym przyspieszeniem kątowym
- Związek między wielkościami w ruchach obrotowym i postępowym
- Moment bezwładności i energia kinetyczna w ruchu obrotowym
- Obliczanie momentu bezwładności

Ruch obrotowy

Zmienne opisujące ruch obrotowy

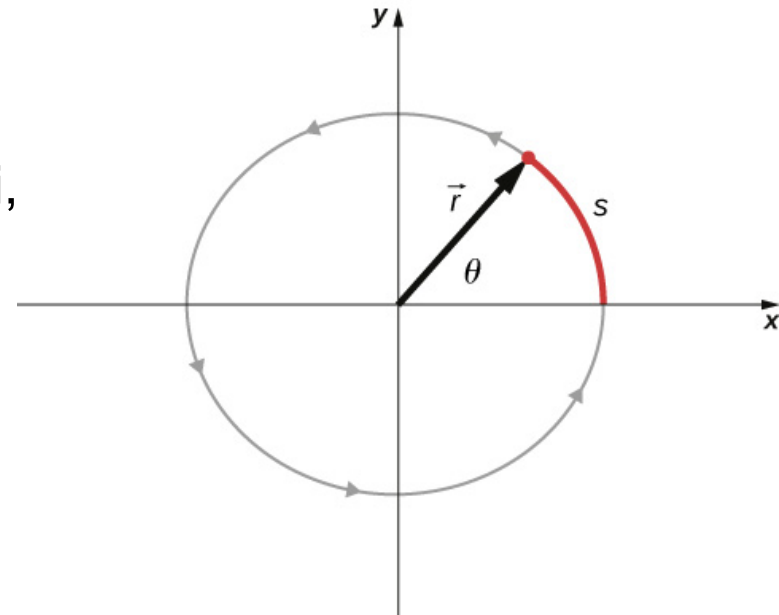
- Jednostajny ruch po okręgu jest ruchem po okręgu ze stałą wartością prędkości (szybkością).
- cząstka poruszająca się po okręgu,
- wektor położenia cząstki tworzy kąt θ z osią x ,
- kąt rośnie w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, gdy cząstka przesuwa się po okręgu,
- kąt θ nazywamy położeniem kątowym cząstki.
- W miarę przesuwania się cząstki po okręgu zakreśla ona łuk o długości s .



Ruch obrotowy

Zmienne opisujące ruch obrotowy

- Związek pomiędzy wartością kąta θ a promieniem okręgu i długością łuku wyraża się wzorem:
$$\theta = \frac{s}{r}$$
- Kąt θ , kątowe położenie cząstki, mierzony jest w radianach (rad). Kąt radianów odpowiada w mierze łukowej kątowi 360° .
- Należy zauważyć, że kąt wyrażony w radianach jest ilorazem dwóch długości, a zatem jest wielkością bezwymiarową.

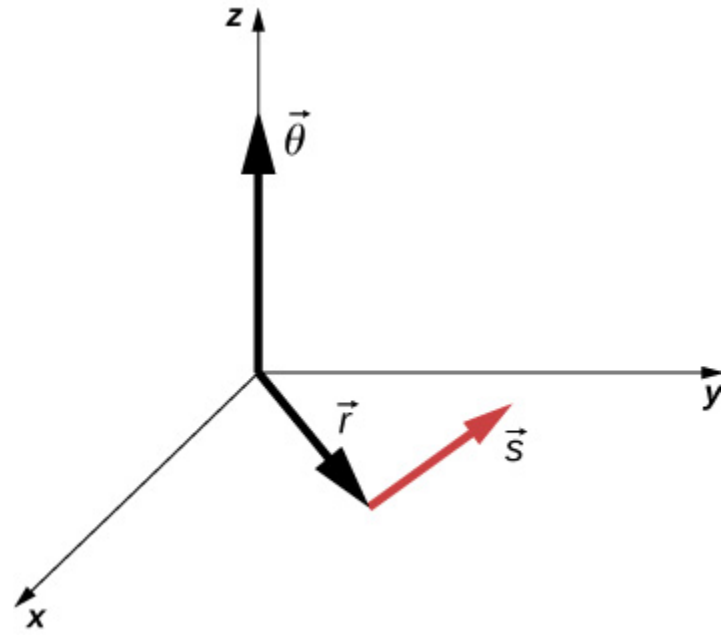


Ruch obrotowy

Zmienne opisujące ruch obrotowy

- Kątowi θ możemy przypisać wektor $\vec{\theta}$.
- Wektor $\vec{\theta}$ jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny xy .
- Wektory położenia $\vec{r}$ i $\vec{s}$ długości łuku leżą w płaszczyźnie xy .
- Te trzy wektory związane są relacją:

$$\vec{s} = \vec{\theta} \times \vec{r}$$



Ruch obrotowy

Zmienne opisujące ruch obrotowy – prędkość kąтова

- Wartość wektora prędkości kątowej oznaczamy jako ω , jest szybkością zmian kąta θ , gdy cząstka porusza się po łuku.
- Chwilowa wartość prędkości kątowej

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

- Jednostką prędkości kątowej jest radian na sekundę (rad/s).
- Prędkość kątową możemy w prosty sposób powiązać z częstotliwością f (wyrażaną w obrotach na sekundę - obr/s):

$$\omega = 2\pi f.$$

Ruch obrotowy

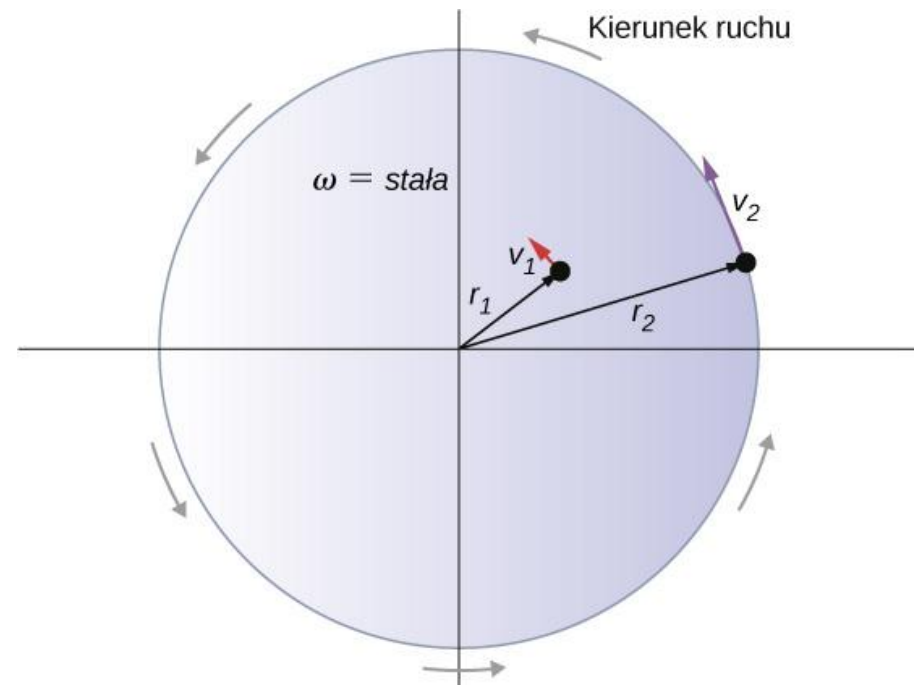
Zmienne opisujące ruch obrotowy – prędkość kątowna

- zapiszmy $s = r\theta$, obliczając pochodną po czasie:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(r\theta) = \underbrace{\theta \frac{dr}{dt}}_0 + r \frac{d\theta}{dt} = r \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega}$$

- otrzymujemy równanie wiążące prędkość liniową i kątową

$$v = r\omega$$



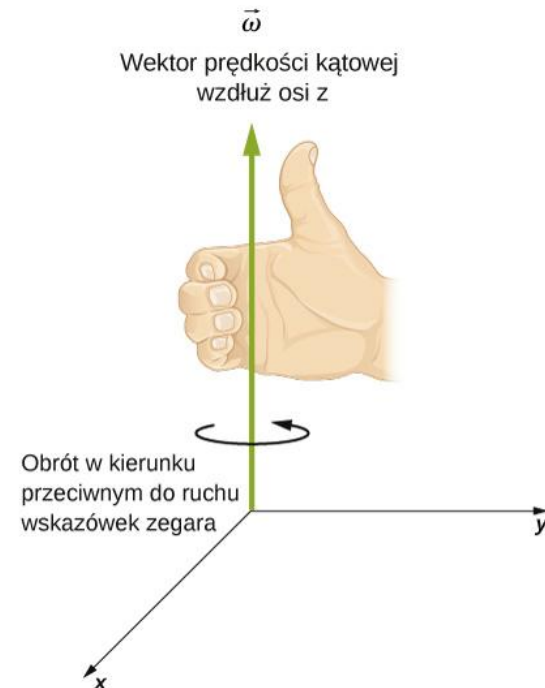
Ruch obrotowy

Zmienne opisujące ruch obrotowy – prędkość kątowa

- Wektor $\vec{\omega}$ jest wektorem związanym z prędkością kątową i jest skierowany wzdłuż osi obrotu.

- Ostatecznie

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



Ruch obrotowy

Zmienne opisujące ruch obrotowy – przyspieszenie kątowe

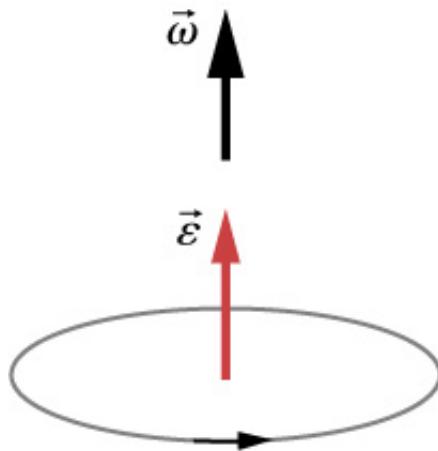
- Podobnie jak w ruchu prostoliniowym dobrze jest umieć określić szybkość zmian prędkości kątowej czyli przyspieszenie kątowe.
- Chwilowe przyspieszenie kątowe

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

- Jednostką przyspieszenia kątowego jest rad/s².

Ruch obrotowy

Zmienne opisujące ruch obrotowy – przyspieszenie kątowe



(a) Obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, prędkość kątowa rośnie

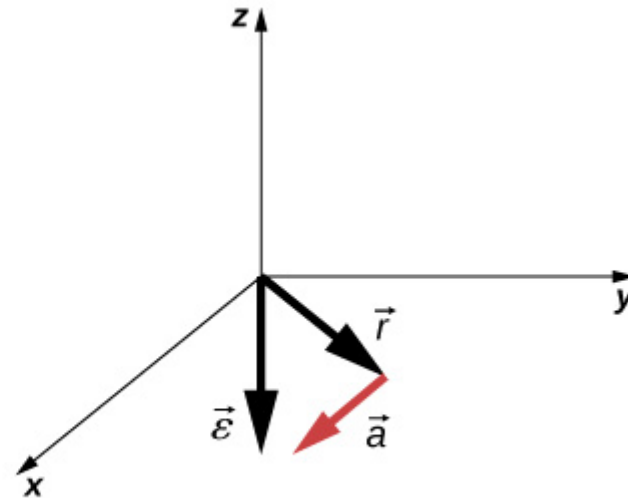
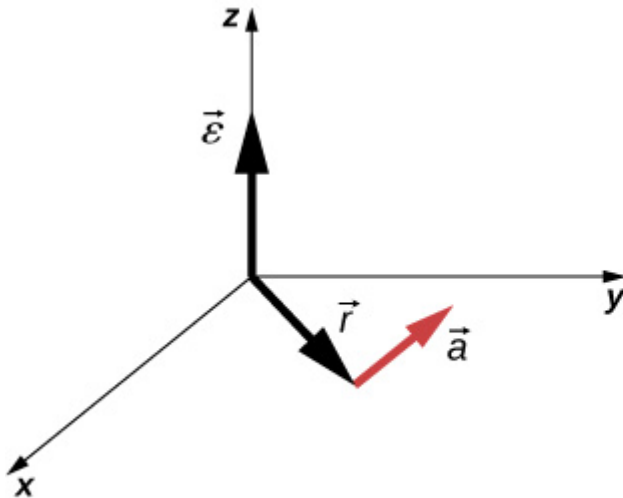
Ruch obrotowy

Zmienne opisujące ruch obrotowy – przyspieszenie kątowe

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



$$\vec{a}_s = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$



Ruch obrotowy

Obroty ze stałym przyspieszeniem kątowym

Zależność drogi kątowej (położenia kątowego) od średniej prędkości kątowej	$\theta_k = \theta_0 + \bar{\omega}t$
Zależność prędkości kątowej od stałego przyspieszenia kątowego	$\omega_k = \omega_0 + \varepsilon t$
Zależność drogi kątowej (położenia kątowego) od początkowej prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego	$\theta_k = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$

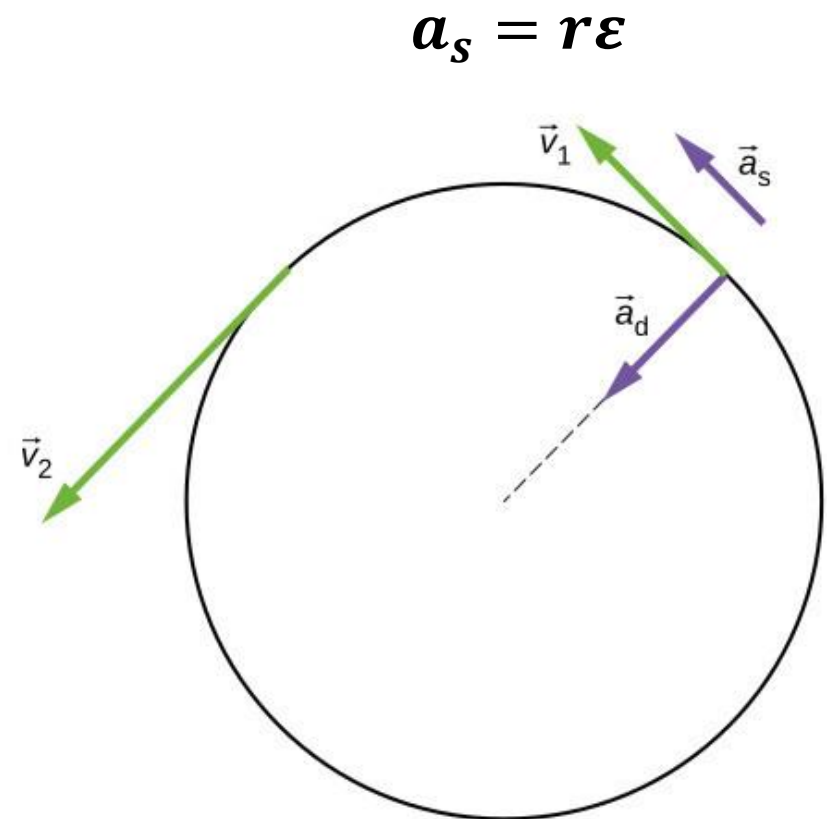
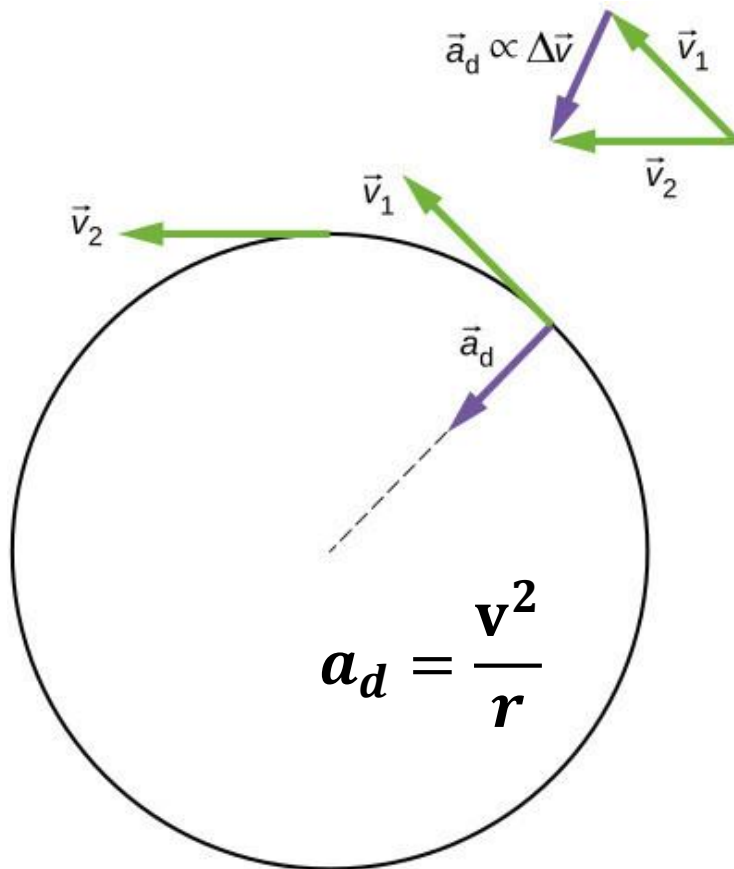
Ruch obrotowy

Zmienne kątowe a zmienne liniowe

	Liniowe	Obrotowe
Położenie	x	θ
Prędkość	$v = dx/dt$	$\omega = d\theta/dt$
Przyspieszenie	$a = dv/dt$	$\varepsilon = d\omega/dt$

Ruch obrotowy

Zmienne kątowe a zmienne liniowe



Ruch obrotowy

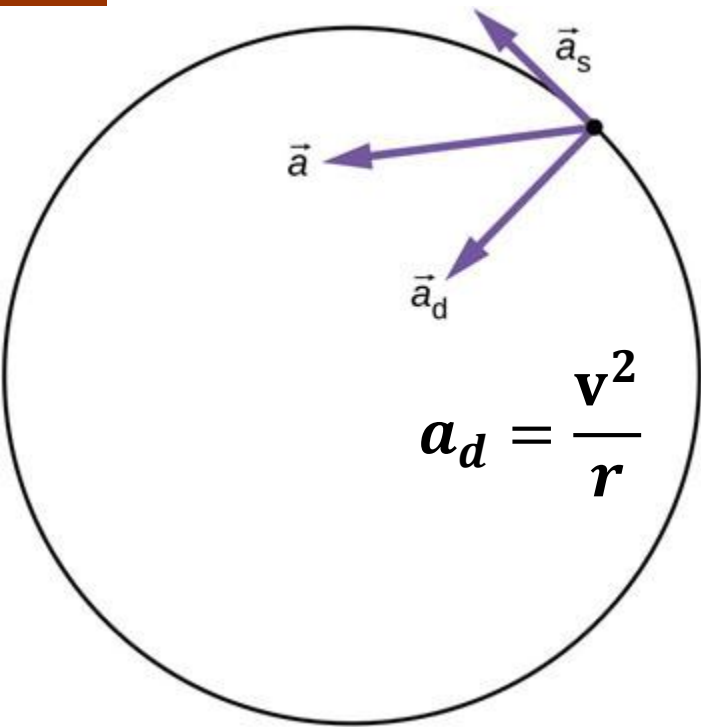
Zmienne kątowe a zmienne liniowe

$$a_s = r\varepsilon$$

$$\vec{a}_d \perp \vec{a}_s$$

$$\vec{a} = \vec{a}_d + \vec{a}_s$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_d^2 + a_s^2}$$



Ruch obrotowy

Zmienne kątowe a zmienne liniowe

Ruch obrotowy	Ruch postępowy
$\theta_k = \theta_0 + \bar{\omega}t$	$x = x_0 + \bar{v}t$
$\omega_k = \omega_0 + \varepsilon t$	$v_k = v_0 + at$
Ruch obrotowy	Ruch postępowy
$\theta_k = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$	$x_k = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega_k^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon(\Delta\theta)$	$v_k^2 = v_0^2 + 2a(\Delta x)$

Ruch obrotowy	Ruch postępowy	Związek pomiędzy wielkościami (r = promień okręgu)
θ	s	$\theta = s/r$
ω	v	$\omega = v/r$
ε	a_s	$\varepsilon = a_s/r$
	a_d	$a_d = v^2/r$

Ruch obrotowy

Energia kinetyczna ruchu obrotowego

- Podobnie jak w ruchu postępowym - dowolne obracające się ciało ma energię kinetyczną.
- Analogia nie jest pełna ponieważ w czasie wykonywania obrotu każdy punkt ciała ma inną prędkość liniową.
- W celu wyznaczenia energii kinetycznej ruchu obrotowego możemy posłużyć się prędkością kątową, która ma taką samą wartość dla każdego punktu obracającego się ciała.

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2$$

Ruch obrotowy

Dotychczas zajmowaliśmy się głównie ruchem ciała (punktu materialnego), teraz zajmiemy ruchem ciała rozciągniętego – bryły sztywnej.

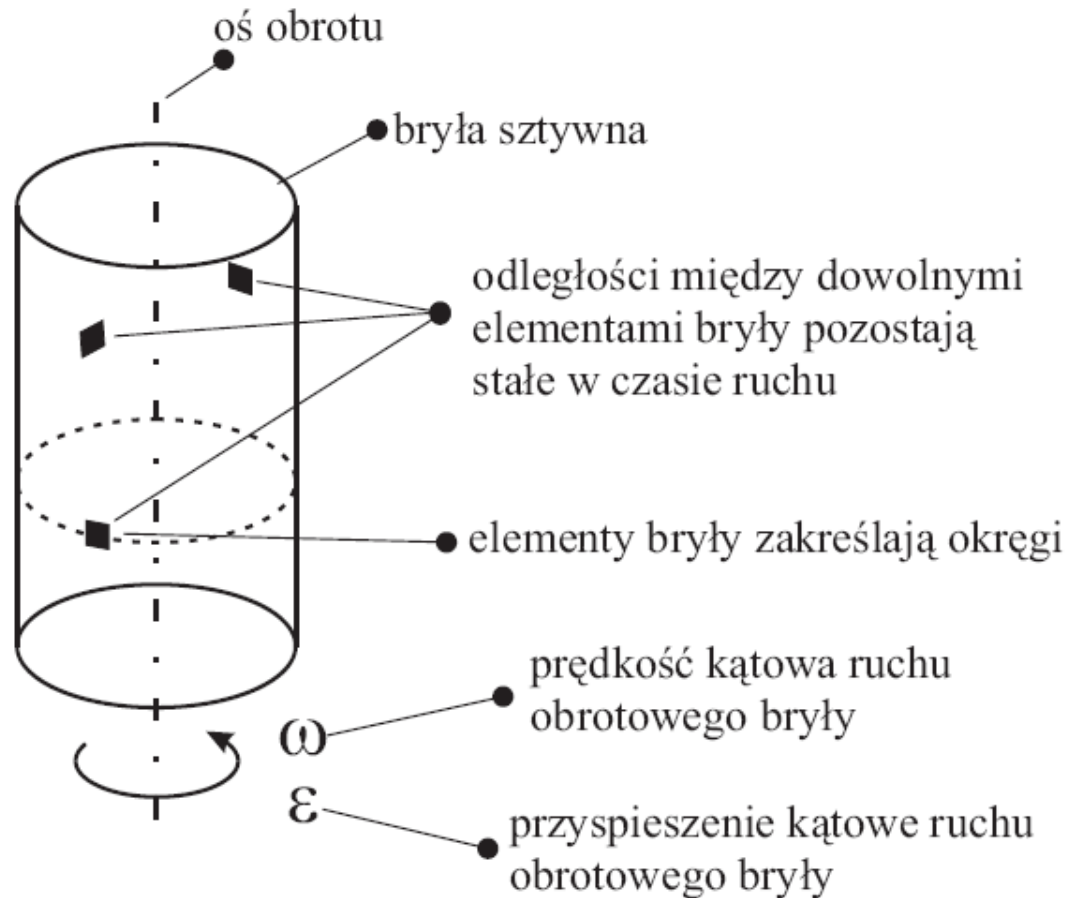
Bryłą sztywną nazywamy takie ciało, w którym odległości pomiędzy poszczególnymi jego elementami nie zmieniają się, niezależnie od działających sił.

Jeżeli bryła sztywna wiruje wokół osi obrotu, to prędkość kątowa i przyspieszenie kątowe wszystkich jej elementów są jednakowe.

Ruch obrotowy

Bryła sztywna (ciało sztywne)

*Jak to
dobrze, że wszystkie
elementy bryły mają te same
prędkości kątowe i
przyspieszenia kątowe! (w tej
samej chwili czasu). Mogę za
ich pomocą opisać ruch
obrotowy bryły sztywnej jako
całości.*



Ruch obrotowy

Energia kinetyczna ruchu obrotowego

- wróćmy do energii kinetycznej

$$E_k = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2$$

- podzielmy teraz obracającą się bryłę sztywną (ciało) na dużą liczbę małych fragmentów, każdy o masie m_j i odległości r_j od osi obrotu.

Każdy z fragmentów będzie miał prędkość v_j ,

- masę całego ciała można teraz zapisać jako $M = \sum_j m_j$
- energię kinetyczną obracającej się bryły można teraz zapisać jako sumę energii kinetycznych wszystkich jej fragmentów:

$$E_k = \sum_j \frac{1}{2}m_j v_j^2 = \sum_j \frac{1}{2}m_j (r_j \omega_j)^2$$

Ruch obrotowy

Energia kinetyczna ruchu obrotowego

- Moment bezwładności

- ponieważ $\omega_j = \omega$

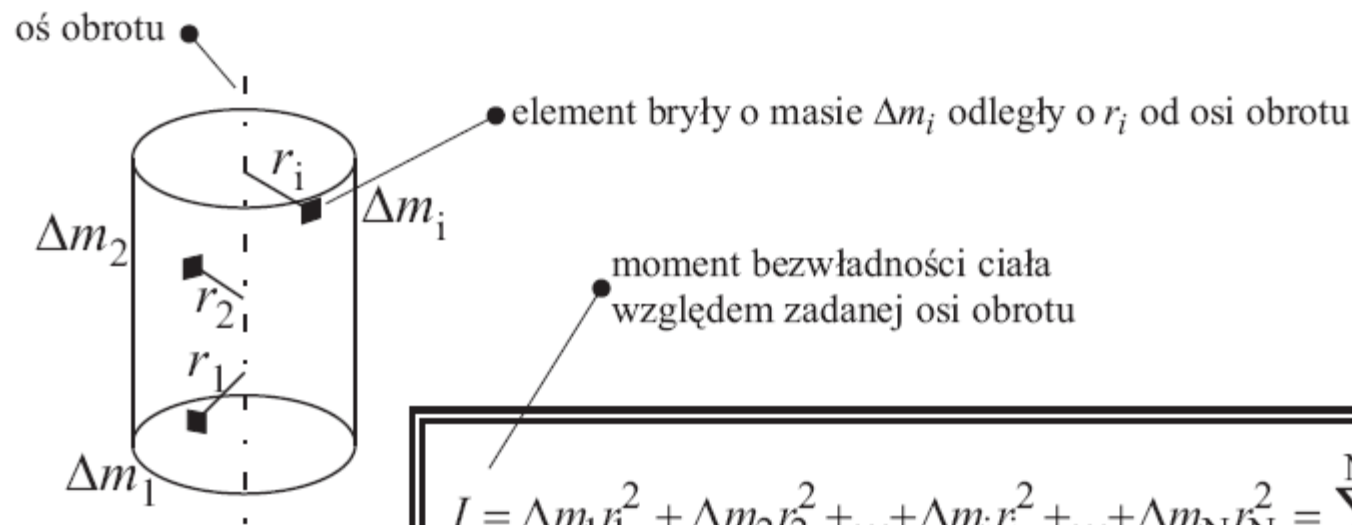
$$E_k = \frac{1}{2} \left(\sum_j m_j r_j^2 \right) \omega^2$$

- jeśli porównamy to wyrażenie do wyrażenia na energię kinetyczną ruchu postępowego, to zauważymy, że $\sum_j m_j r_j^2$ jest odpowiednikiem masy w równaniu na energię kinetyczną ruchu postępowego,
- wielkość tą nazywamy momentem bezwładności (ang. *moment of inertia*), a jej jednostką jest kg m²:

$$I = \sum_j m_j r_j^2$$

Ruch obrotowy

Moment bezwładności



$$I = \Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \dots + \Delta m_i r_i^2 + \dots + \Delta m_N r_N^2 = \sum_{i=1}^N \Delta m_i r_i^2$$

dodajemy do siebie składniki pochodzące od wszystkich elementów bryły



W ruchu obrotowym moment bezwładności odgrywa taką rolę jak masa ciała w ruchu postępowym, ale należy pamiętać o tym, iż moment bezwładności dla jednej i tej samej bryły może być bardzo różny w zależności od położenia osi obrotu.

Ruch obrotowy

Moment bezwładności

$$I = \sum_j m_j r_j^2$$

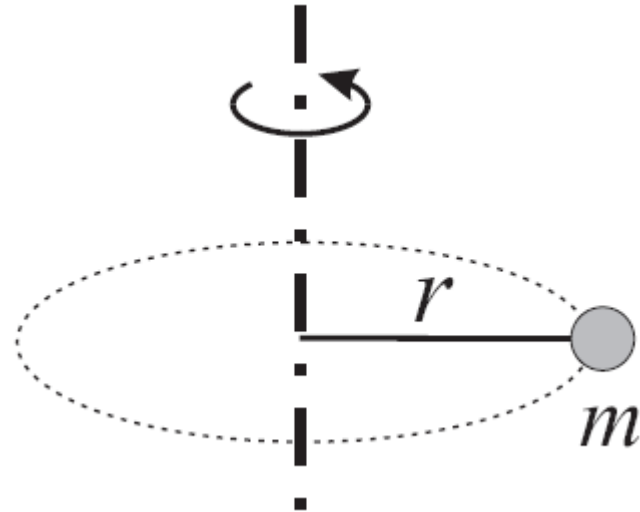
- Moment bezwładności jest ilościową miarą bezwładności obrotowej (podobnie jak w ruchu postępowym masa).
- Im większa wartość momentu bezwładności bryły sztywnej lub układu cząstek, tym bardziej ciało to przeciwstawia się zmianie prędkości kątowej w jego obrocie wokół stałej osi.
- Energię kinetyczną w ruchu obrotowym zapisać więc możemy jako

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Ruch obrotowy

Moment bezwładności punktu materialnego

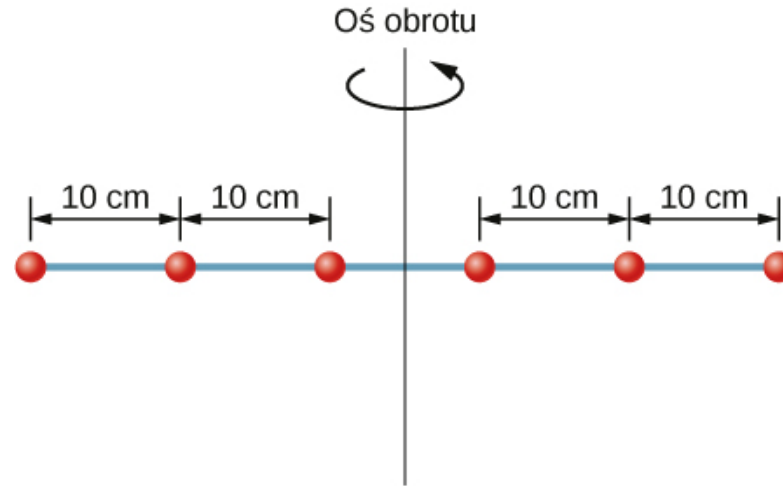
$$I = mr^2$$



wielkość charakterystyczna dla
danego ciała i określonej osi obrotu

Ruch obrotowy

Moment bezwładności układu cząstek

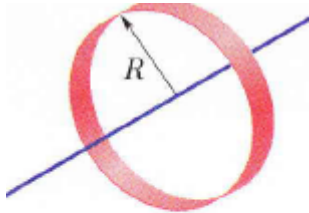


Sześć małych nakrętek umieszczono na pręcie o pomijalnej masie i o długości 0,5 m, masa każdej z nakrętek wynosiła 20 g.

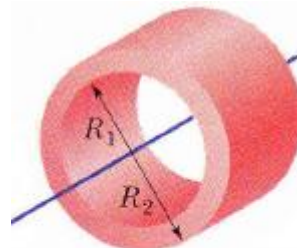
- Jaki jest moment bezwładności układu nakrętek?
- Jeżeli usuniemy dwie nakrętki leżące najbliżej osi obrotu, to jaki będzie moment bezwładności układu pozostałych nakrętek?
- Jeżeli układ sześciu nakrętek obraca się z częstotliwością 5 obr/s, to jaka jest jego energia kinetyczna?

Ruch obrotowy

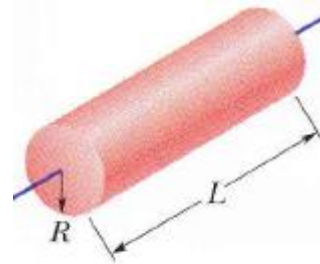
Moment bezwładności – przykłady



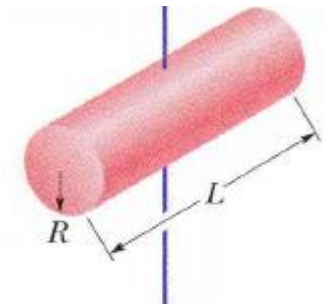
$$I = MR^2$$



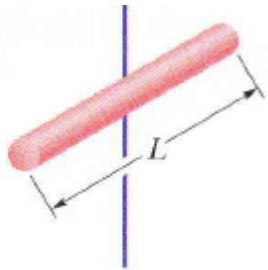
$$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$$



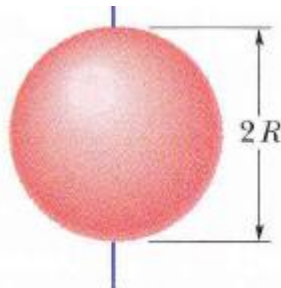
$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



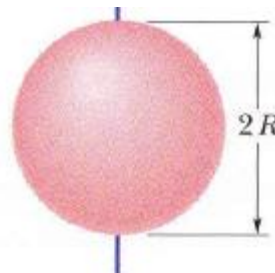
$$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$$



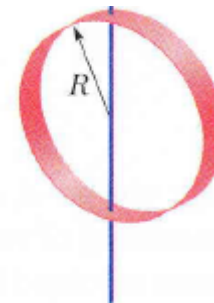
$$I = \frac{1}{12}ML^2$$



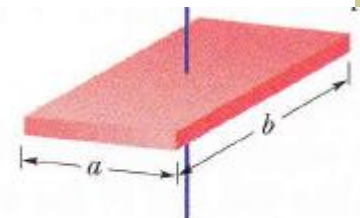
$$I = \frac{2}{5}MR^2$$



$$I = \frac{2}{3}MR^2$$



$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



$$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$

Ruch obrotowy

Moment bezwładności – przykłady

Typowy mały helikopter ratunkowy ma cztery łopaty wirnika: każda ma długość 4 m i masę $m = 50$ kg. Łopaty można rozpatrywać jako cienkie pręty, które obracają się wokół jednego z końców, wokół osi prostopadłej do ich długości. Całkowita masa załadowanego helikoptera wynosi $M = 1000$ kg.

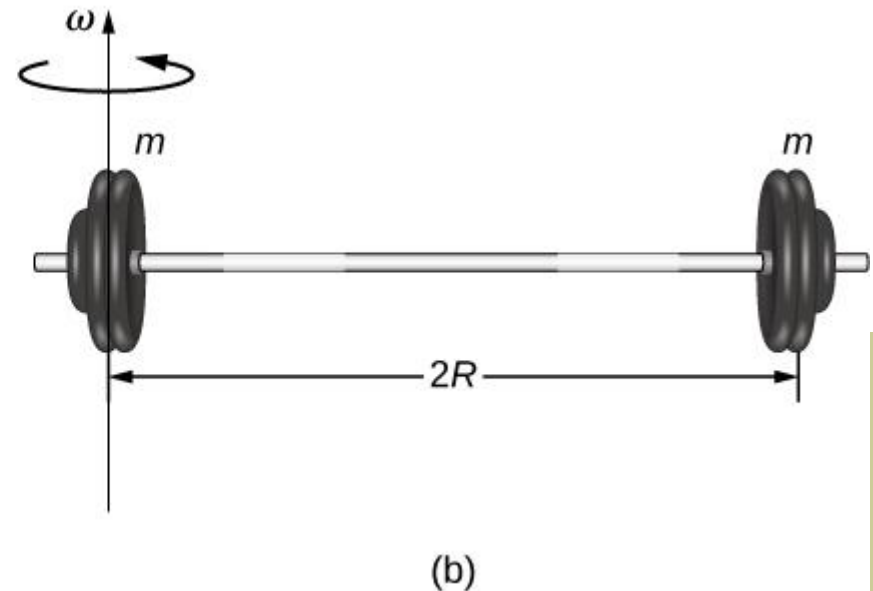
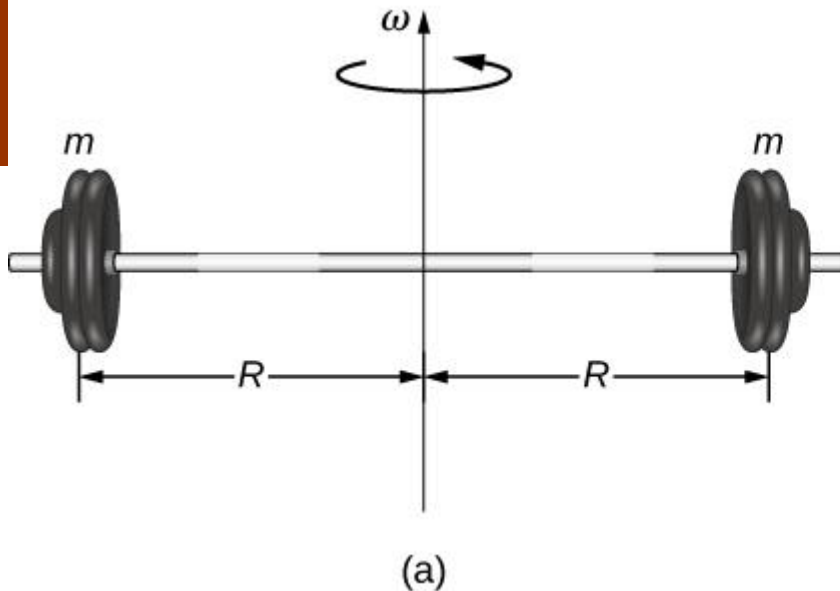
- Oblicz energię kinetyczną ruchu obrotowego łopat wirnika, jeśli ich prędkość obrotowa wynosi 300 obr/min.
- Oblicz energię kinetyczną ruchu postępowego helikoptera, gdy leci on z prędkością 20 m/s, i porównaj ją z energią kinetyczną ruchu obrotowego łopat.



Ruch obrotowy

Moment bezwładności – przykłady

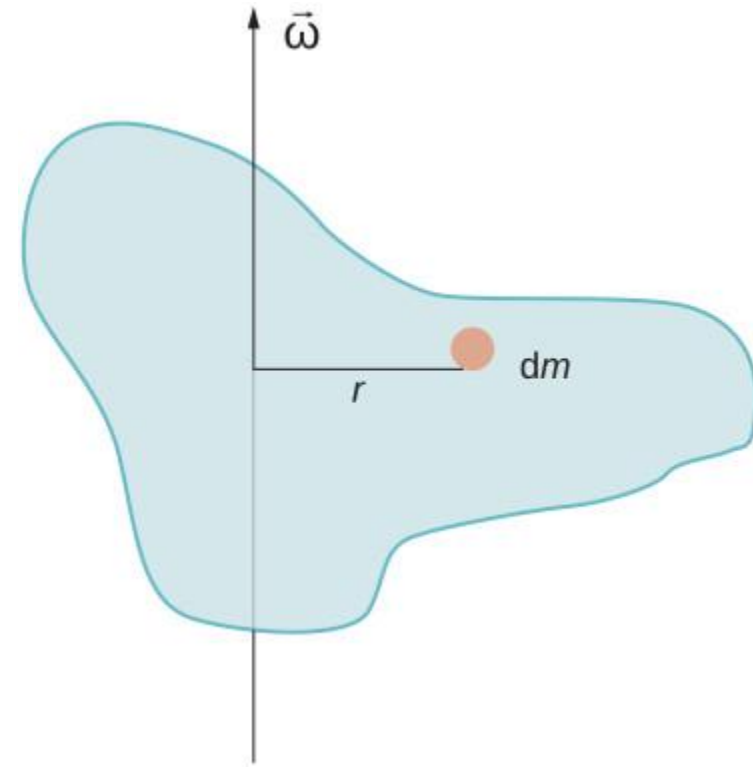
- wartość momentu bezwładności będzie zależała od wyboru osi, czyli od rozkładu masy względem osi,
- weźmy sztangę i obliczmy moment bezwładności względem dwóch różnych osi



Ruch obrotowy

Moment bezwładności - ciało ciągłe

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{zmienia się w równanie} \quad I = \int r^2 dm$$

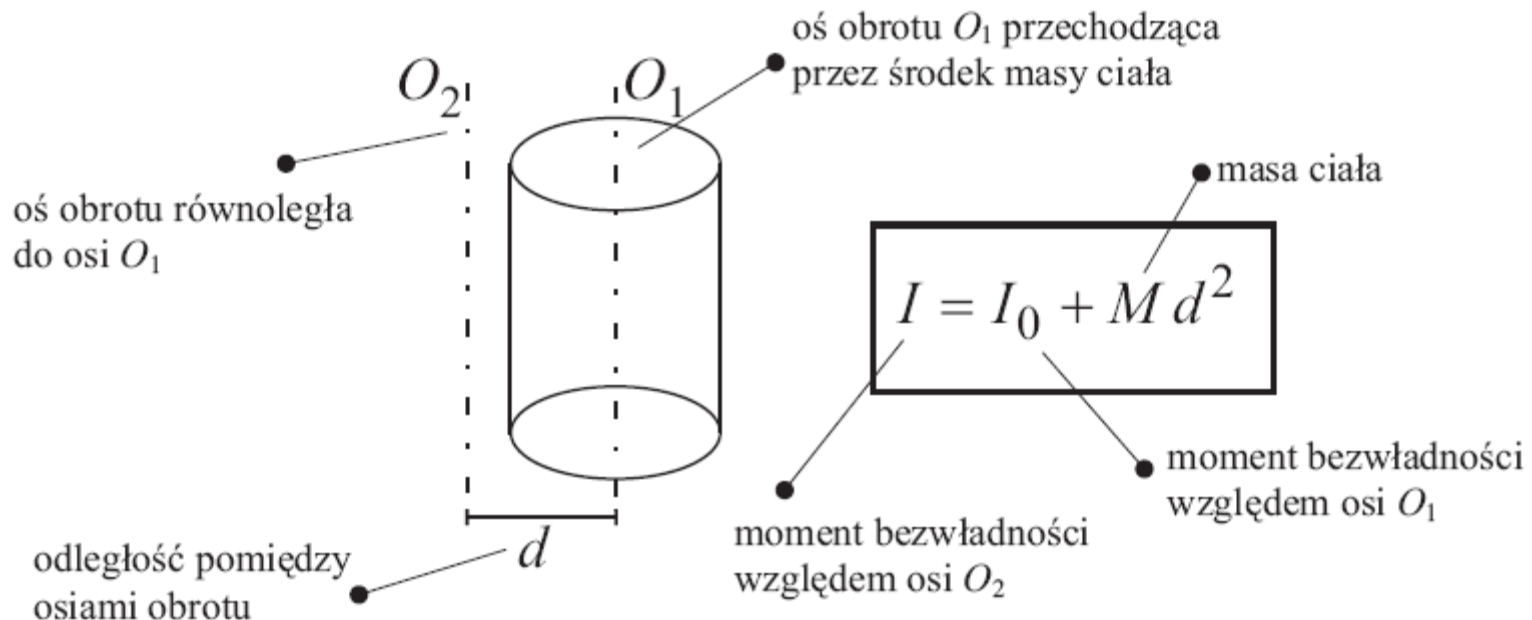


Ruch obrotowy

Twierdzenie Steinera

Moment bezwładności względem osi równoległej do osi przechodzącej przez środek masy jest sumą momentu bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy oraz iloczynu masy i kwadratu odległości pomiędzy osiami:

$$I_{\text{os równoległa}} = I_{\text{środek masy}} + md^2$$



Dziękuję za uwagę!