

Fizyka 1B

Wykład 5

dr Piotr Sitarek, prof. uczelni

Katedra Fizyki Doświadczalnej

Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej

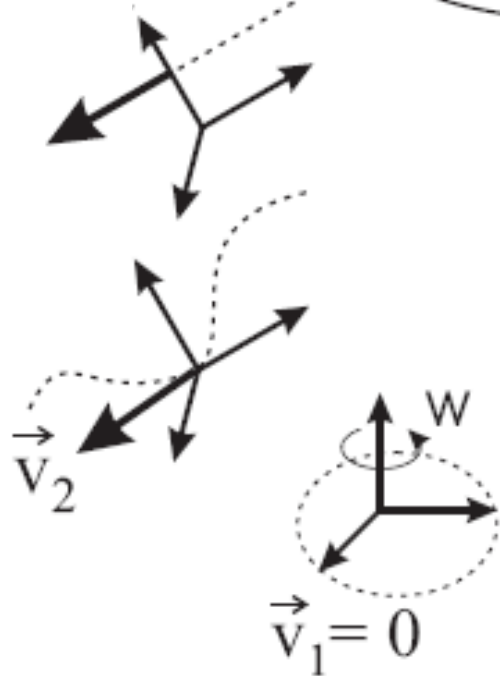
- Siły bezwładności
- Pęd
- Popęd siły i zderzenia
- Zasada zachowania pędu
- Rodzaje zderzeń
- Zderzenia w wielu wymiarach
- Środek masy

Siły bezwładności

Inercjalne i nieinercjalne układy odniesienia

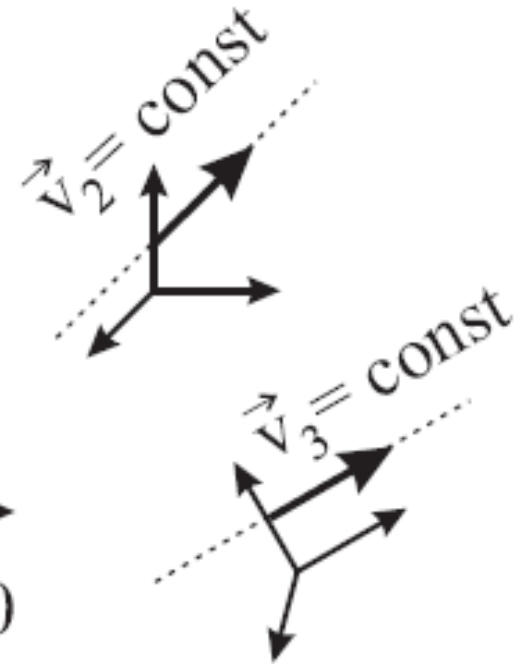
Układy nieinercjalne

$$\vec{v}_3 \neq \text{const}$$



Jestem w układzie inercyjnym. Po mojej lewej stronie odkładam inne układy inercjalne a po prawej nieinercjalne.

Układy inercjalne



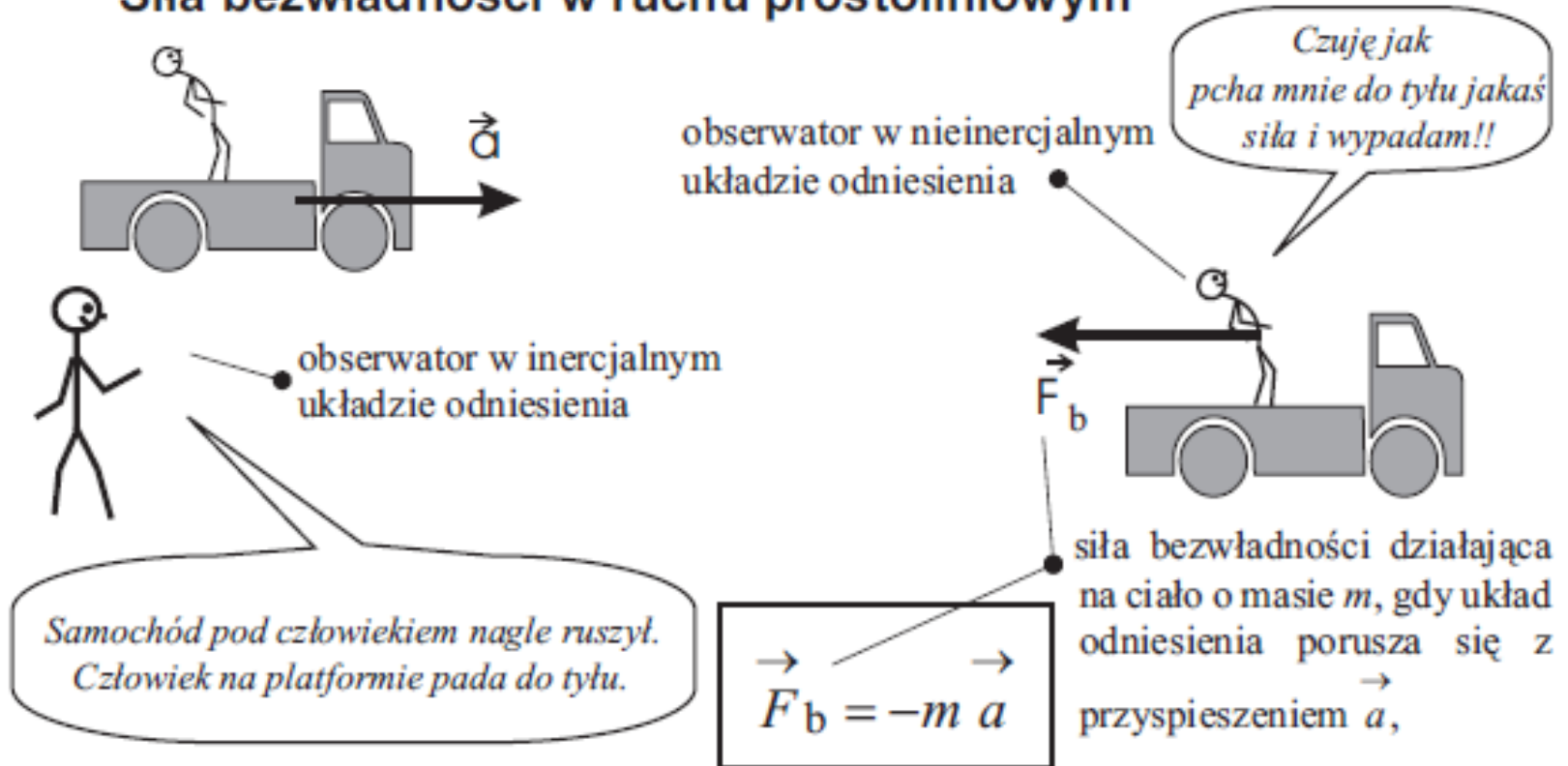
Siły bezwładności

Siły bezwładności (siły pozorne)

- Przyczyną sił bezwładności nie jest oddziaływanie ze strony innych ciał, lecz przyspieszenie układu odniesienia.
- Układ odniesienia poruszający się z przyspieszeniem nazywamy układem nieinercyjnym.
- Obserwator w nieinercyjnym układzie odniesienia odczuje działanie sił bezwładności podobnie jak działanie innych sił (których źródłem jest oddziaływanie ze strony innych ciał).

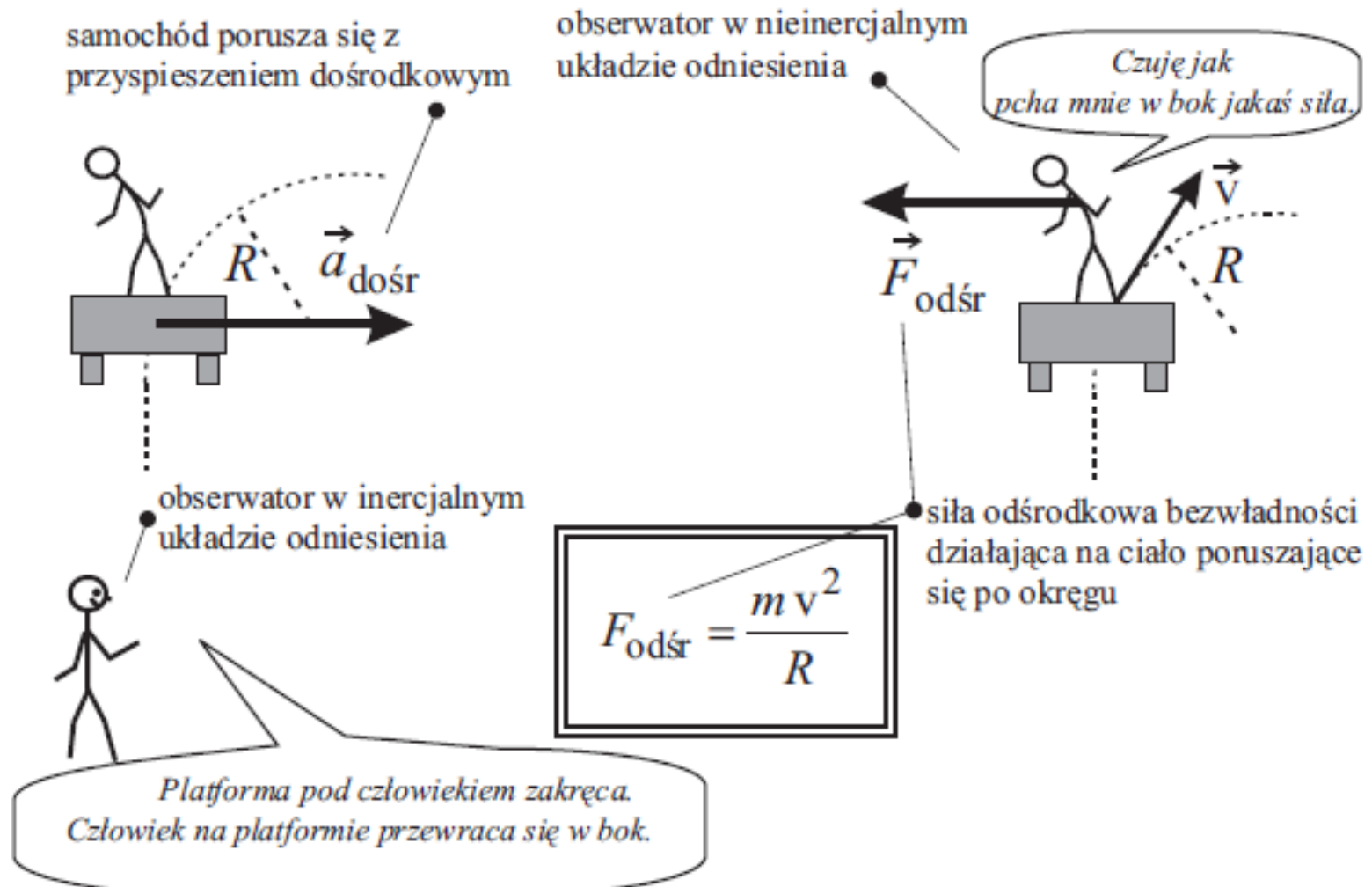
Siły bezwładności

Siła bezwładności w ruchu prostoliniowym

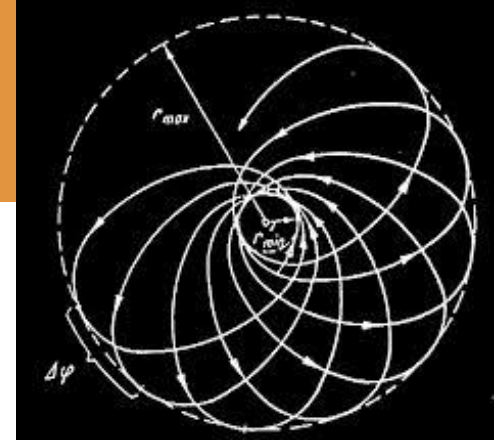


Siły bezwładności

Odśrodkowa siła bezwładności

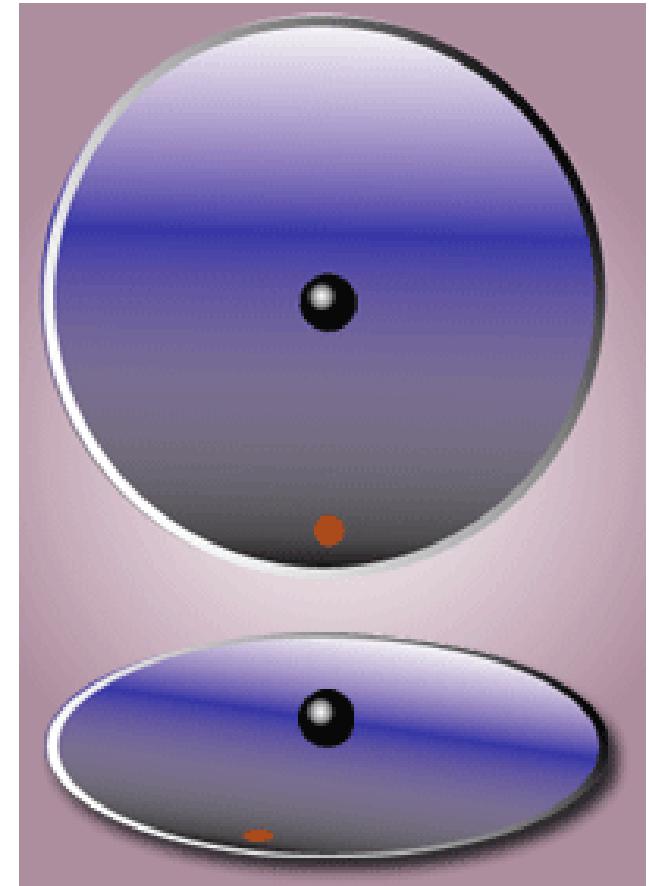


Siły bezwładności



Siła Coriolisa

- dla obserwatora pozostającego w układzie obracającym się objawia się zakrzywieniem toru ciał poruszających się wewnątrz niego,
$$F_C = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v})$$
- na półkuli północnej mocniej podmywane są prawe brzegi rzek, na południowej – lewe,
- na półkuli północnej cyklony poruszają się odwrotnie do ruchu wskazówek zegara, a na południowej zgodnie z nim,
- wahadło,



Pęd i zderzenia

Pęd

- Pęd ciała jest iloczynem jego masy i prędkości.
- Pęd jest wektorem o kierunku i zwrocie zgodnym z wektorem prędkości:

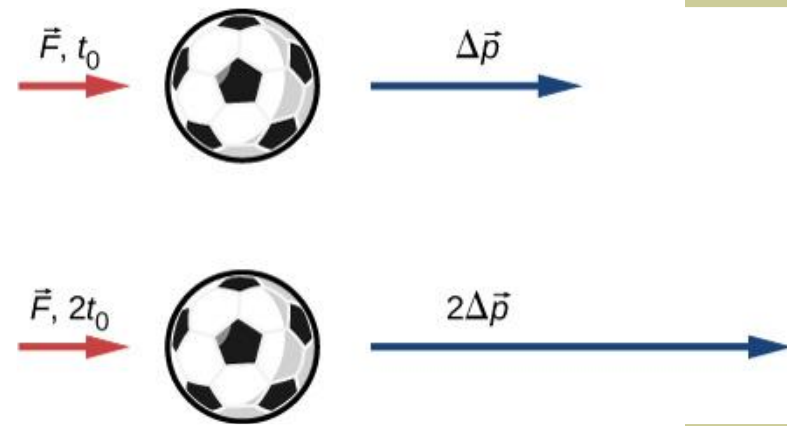
$$\vec{p} = m \vec{v}$$



Pęd i zderzenia

Popęd siły

- Jeżeli na skutek działania siły następuje zmiana prędkości ciała – zmienia się także jego pęd,
- wskazuje to na relację między pędem i siłą.
- Załóżmy, że do pewnego ciała przez pewien czas przyłożono siłę,
- im większa siła, tym większej zmiany pędu ciała się spodziewamy,
- im dłuższy czas działania siły, tym większa będzie zmiana pędu.
- Zatem wartość zmiany pędu będzie proporcjonalna zarówno do wartości działającej siły, jak i do czasu jej działania.

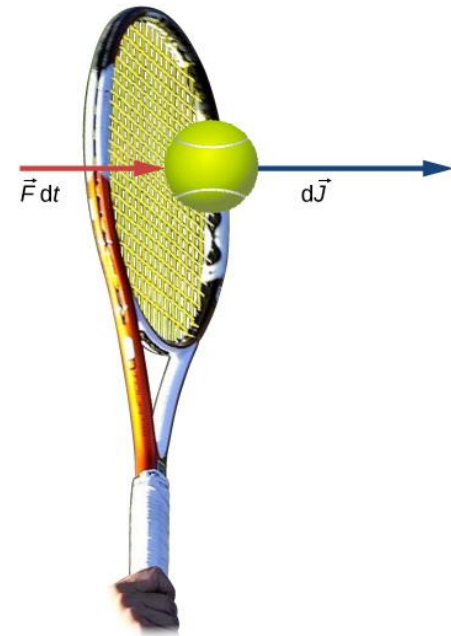


Pęd i zderzenia

Popęd siły

- jeżeli dana wielkość jest jednocześnie proporcjonalna do dwóch lub więcej wielkości, to jest proporcjonalna do ich iloczynu,
- iloczyn siły i czasu jej działania nazywamy popędem siły lub impulsem, bądź też impulsem siły i oznaczamy symbolem $\vec{J}$
- Niech $\vec{F}$ oznacza siłę działającą na ciało przez krótki przedział czasu dt .
Popęd siły, wywieranej na ciało zdefiniowany jest jako

$$d\vec{J} = \vec{F} dt$$



Pęd i zderzenia

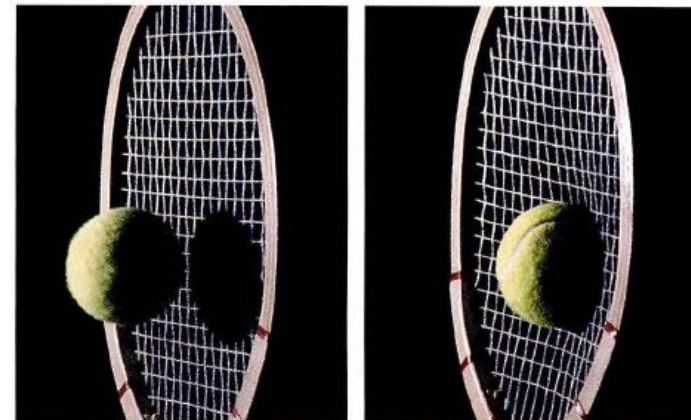
Popęd siły

- Całkowity popęd siły w przedziale czasu od chwili początkowej t_0 do końcowej t_1 wynosi więc

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} d\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt$$

- Do obliczenia popędu siły konieczna jest więc znajomość $F(t)$, co często nie jest możliwe.
- Możemy natomiast posłużyć się średnią wartością siły działającej w pewnym przedziale czasu, i

$$\vec{J} = \vec{F}_{\text{śr}} \Delta t$$



Pęd i zderzenia

Popęd siły (przykład)

Krater meteorytowy w Arizonie (Krater Barringera)

Około 50 tys. lat temu w północnej Arizonie (USA) ogromny, liczący ok. 50 m średnicy meteoryt uderzył w powierzchnię Ziemi z prędkością ok. $1,3 \cdot 10^4$ m/s. W następstwie zderzenia powstał istniejący do dziś krater o średnicy ok. 1200 m, głębokości 170 m, z obrzeżem wypiętrzoną na wysokość 45 m ponad otaczającą go pustynię. Typowa gęstość meteorytów, zawierających głównie żelazo i nikiel, wynosi $8\,000 \text{ kg/m}^3$. Korzystając ze wzoru na popęd siły, wyznacz siłę średnią jaką meteoryt działał na powierzchnię Ziemi podczas zderzenia.



Pęd i zderzenia

Popęd siły

- W przypadku siły niezależnej od czasu, jej wartość średnia i chwilowa są jednakowe:

$$\vec{F}_{\text{sr}} = \vec{F} = m \vec{a}$$

- i

$$\vec{J} = m \vec{a} \Delta t = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Delta t = m \Delta \vec{v}$$

- czyli

$$\vec{J} = m \Delta \vec{p}$$

Pęd i zderzenia

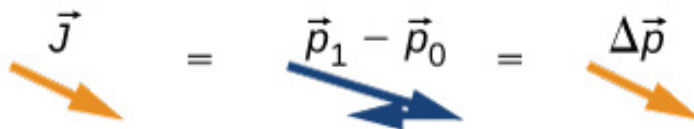
Popęd siły



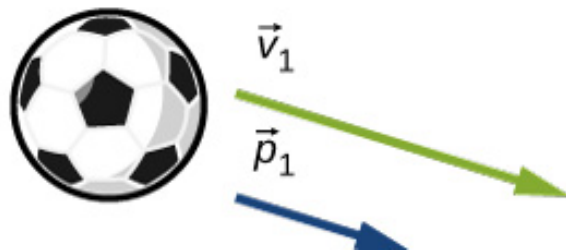
Piłce zostaje przekazany impuls J



Impuls dodaje się do początkowego pędu



Zmiana pędu jest zatem równa impulsowi J



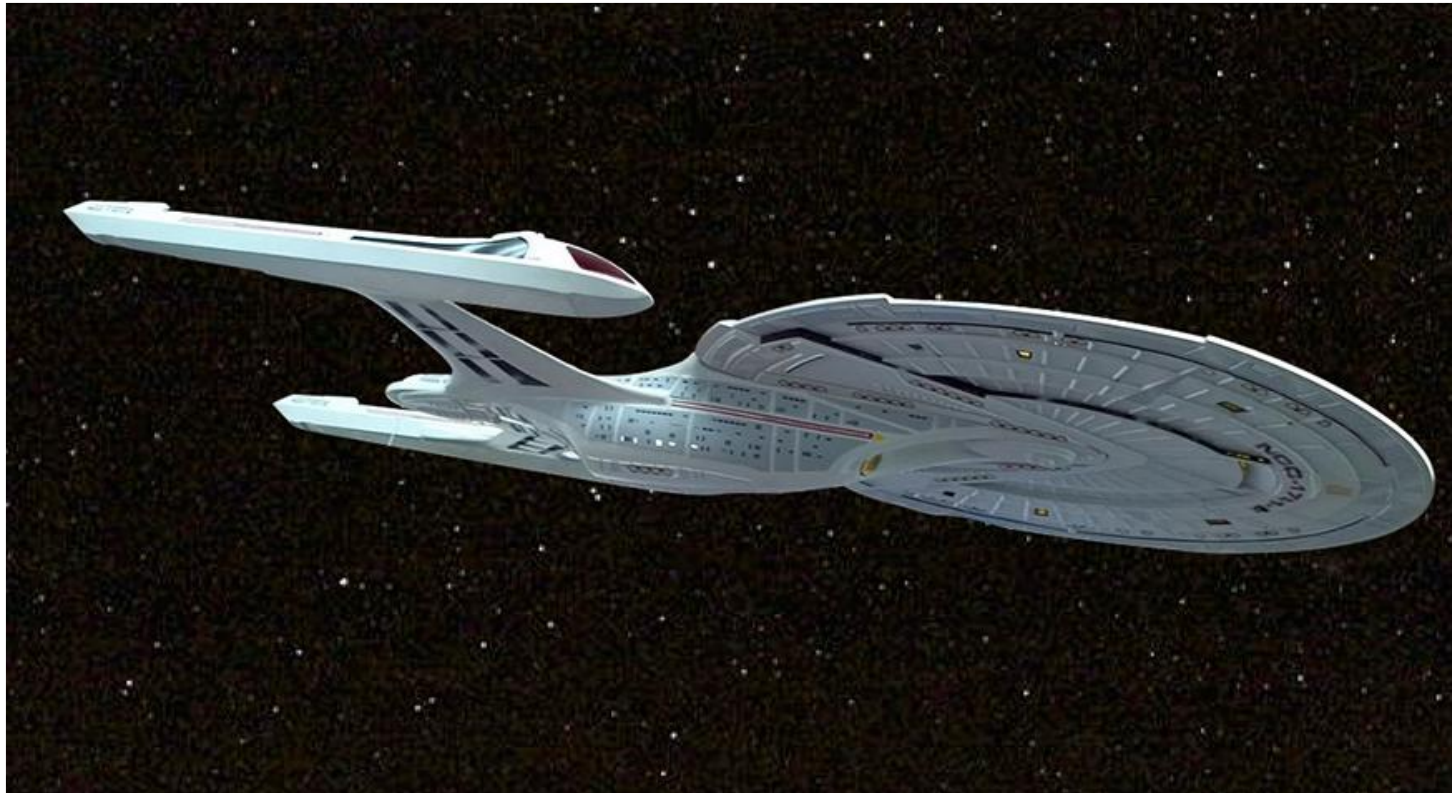
Po zadziałaniu impulsu piłka zyskuje pęd końcowy p_1 [i prędkość v_1]

Pęd i zderzenia

Popęd siły (przykład)

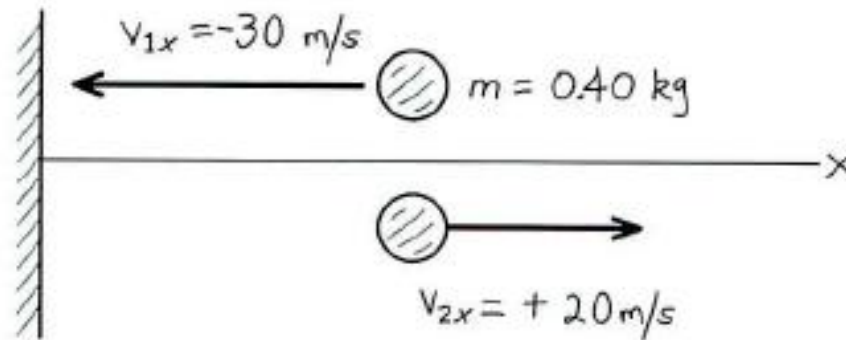
„Panie Sulu, proszę nas stąd zabrać, 1/4 impulsu naprzód!” – tą komendą kapitan statku Enterprise nakazywał rozpędzenie statku ze stanu spoczynku do prędkości końcowej równej 1/4 prędkości światła w próżni.

Przyjmując, że statek dokonał tego w ciągu 60 s, wyznacz siłę rozpędzającą statek.



Układy cząstek

Impuls siły – przykład



$$p_{1x} = mv_{1x} = (0.40 \text{ kg})(-30 \text{ m/s}) = -12 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$p_{2x} = mv_{2x} = (0.40 \text{ kg})(+20 \text{ m/s}) = +8.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$J_x = p_{2x} - p_{1x}$$

$$= 8.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s} - (-12 \text{ kg} \cdot \text{m/s}) = 20 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 20 \text{ N} \cdot \text{s}$$

$$(F_{\text{sr}})_x = \frac{J_x}{\Delta t} = \frac{20 \text{ N} \cdot \text{s}}{0.010 \text{ s}} = 2000 \text{ N}$$

Układy cząstek

Zasada zachowania pędu

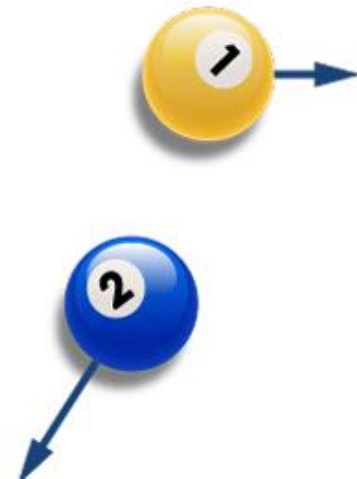
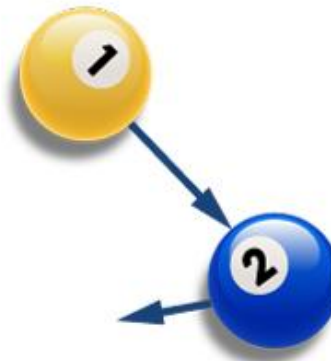
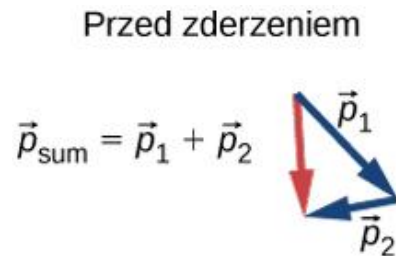
Jeśli na układ cząstek nie działają siły zewnętrzne lub ich wypadkowa jest równa zero, to całkowity pęd układu nie ulega zmianie.

$$\vec{P} = \text{const}$$

$$\Delta \vec{P} = 0$$

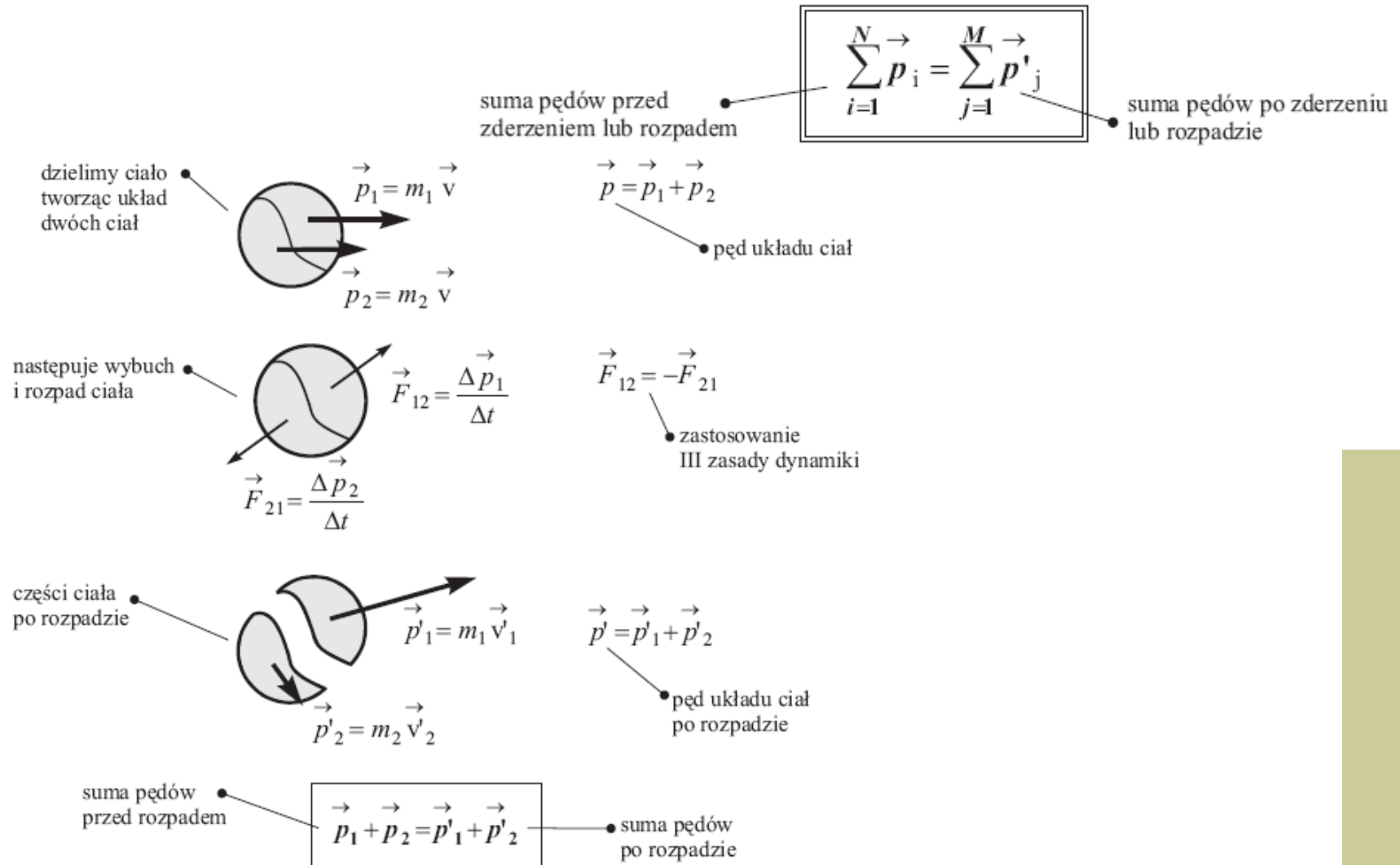
$$\vec{P}_{\text{pocz}} = \vec{P}_{\text{końc}}$$

$$\sum_{j=1}^N \vec{p}_j = \text{const.}$$



Układy cząstek

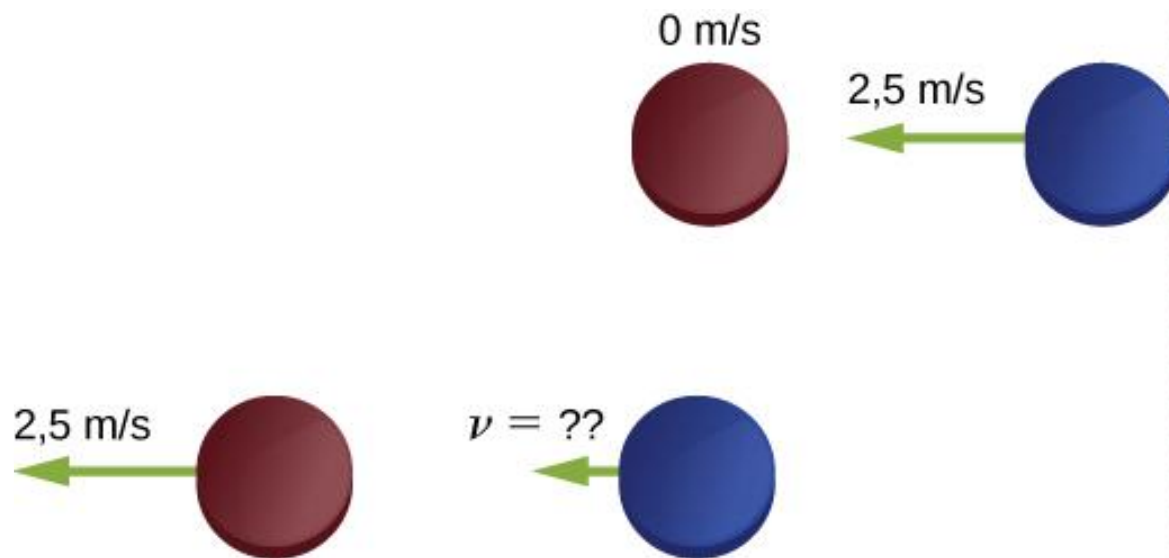
Zasada zachowania pędu



Pęd i zderzenia

Zasada zachowania pędu

Dwa krążki hokejowe o takich samych masach, wynoszących 15 g położono na płaskim, gładkim lodzie. Czerwony krążek pozostaje w spoczynku, a krążkowi niebieskiemu nadano prędkość 2,5 m/s, skierowaną w lewo, tak by uderzył on centralnie w krążek czerwony. Po zderzeniu krążek czerwony przesuwa się w lewo, także z prędkością 2,5 m/s. Jaka będzie prędkość krążka niebieskiego?



Pęd i zderzenia

Zderzenia

- Chociaż pęd jest wielkością zachowaną we wszystkich przypadkach wzajemnego oddziaływania ciał, nie wszystkie oddziaływania (na przykład zderzenia lub eksplozje) są jednakowe.
- Możemy rozróżnić następujące przypadki:
 - Pojedynczy obiekt może eksplodować, rozpadając się na więcej elementów (w skrócie: jeden na wiele).
 - Wiele obiektów (przynajmniej dwa) mogą zderzyć się i połączyć na skutek tego zderzenia (w skrócie: wiele na jeden).
 - Wiele obiektów zderzając się odbija się od siebie, co w efekcie daje również wiele ciał w ruchu (w skrócie: wiele na wiele).

Pęd i zderzenia

Zderzenia

- W każdym rodzaju oddziaływania, w przypadku układu zamkniętego, jego pęd jest zachowany natomiast energia kinetyczna – już niekoniecznie:
 - Jeżeli $0 < E_{k\ po} < E_{k\ przed}$, zderzenie jest niesprężyste.
 - Jeżeli $E_{k\ po} = 0$, zderzenie jest idealnie niesprężyste.
 - Jeżeli $E_{k\ po} = E_{k\ przed}$, zderzenie jest sprężyste.
 - Jeżeli $E_{k\ po} > E_{k\ przed}$, mamy do czynienia z eksplozją.
- Należy pamiętać, że analizując zderzenia lub eksplozje, można opisywać je z użyciem pędu i energii kinetycznej.

Zderzenia

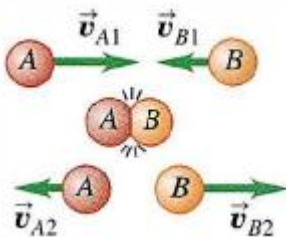
Pęd i energia kinetyczna podczas zderzeń

Gdy w czasie zderzenia energia kinetyczna ciała jest zachowana, takie zderzenie nazywamy **zderzeniem sprężystym**.

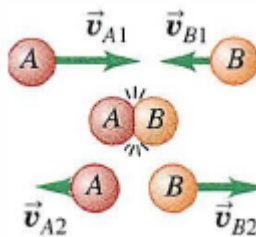
Gdy energia kinetyczna nie jest zachowana, zderzenie nazywamy **zderzeniem niesprężystym**.

Niezależnie czy zderzenie jest sprężyste, czy niesprężyste, jeśli zachodzi w układzie zamkniętym i izolowanym, to pęd układu ciał nie zmienia się.

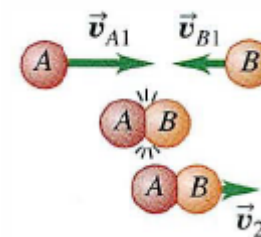
zderzenie
sprężyste, $\Delta E_k = 0$



zderzenie
niesprężyste, $\Delta E_k \neq 0$

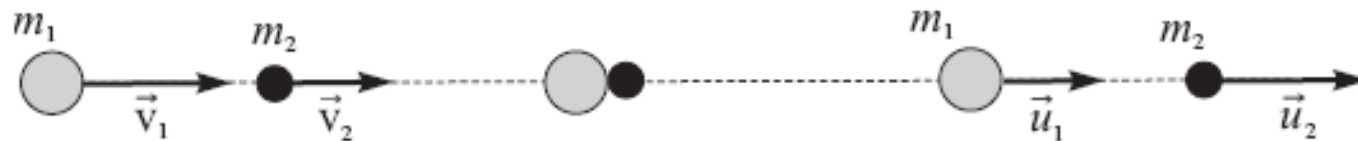


zderzenie całkowicie
niesprężyste



Zderzenia

Zderzenia sprężyste (centralne) w jednym wymiarze



$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$ $m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$

całkowity pęd przed zderzeniem całkowity pęd po zderzeniu

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

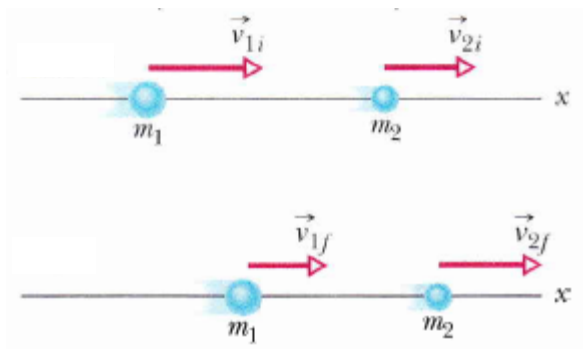
$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

całkowita energia kinetyczna
przed zderzeniem

całkowita energia kinetyczna
po zderzeniu

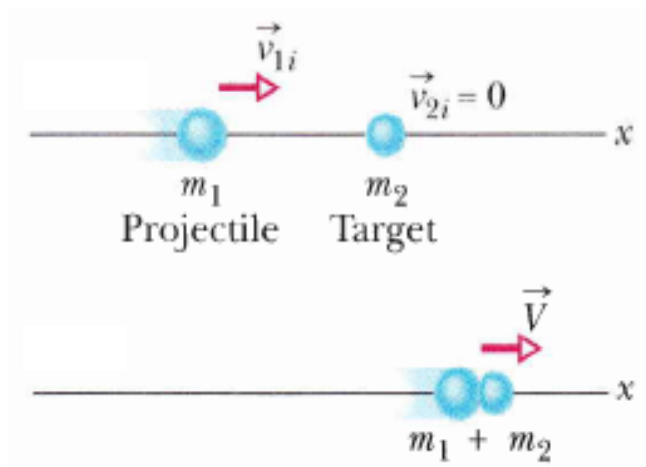
Zderzenia

Zderzenia niesprężyste w jednym wymiarze



$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

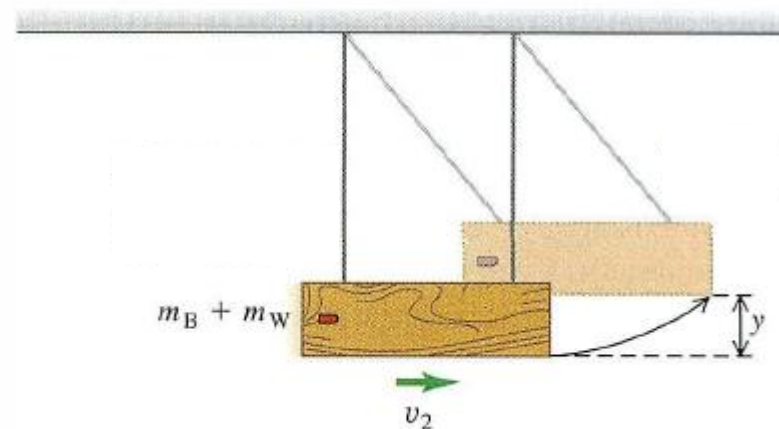
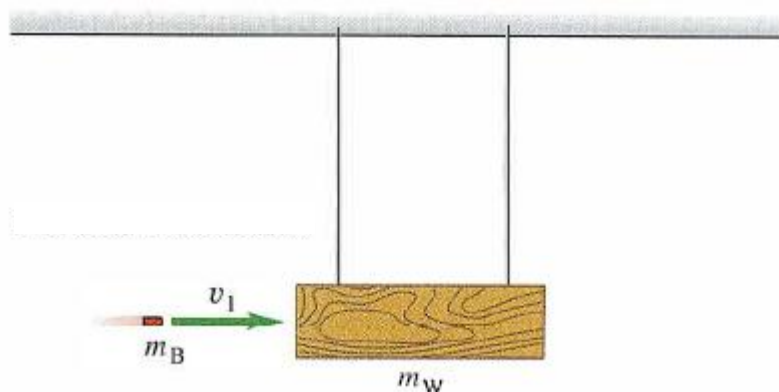


$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) V$$

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

Zderzenia

Zderzenia niesprężyste w jednym wymiarze – wahadło balistyczne



$$m_B v_1 = (m_B + m_W) v_2 \quad v_1 = \frac{m_B + m_W}{m_B} v_2$$

$$\frac{1}{2} (m_B + m_W) v_2^2 = (m_B + m_W) g y \quad v_2 = \sqrt{2gy}$$

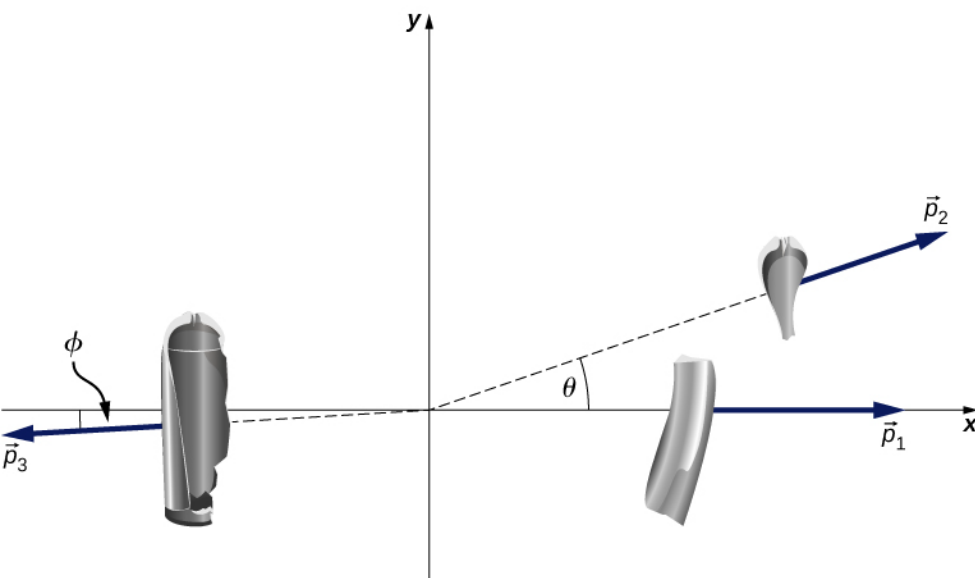
$$v_1 = \frac{m_B + m_W}{m_B} \sqrt{2gy}$$

Pęd i zderzenia

Zderzenia w wielu wymiarach

$$p_x \text{ suma po} = p_{x1} \text{ przed} + p_{x2} \text{ przed}$$

$$p_y \text{ suma po} = p_{y1} \text{ przed} + p_{y2} \text{ przed}$$



$$p_{xpo} = p_{xprzed},$$

$$p_{1x} + p_{2x} + p_{3x} = 0,$$

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + p_{3x} = 0,$$

$$p_{3x} = -m_1 v_{1x} - m_2 v_{2x}$$

$$p_{ypo} = p_{yprzed},$$

$$p_{1y} + p_{2y} + p_{3y} = 0,$$

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + p_{3y} = 0,$$

$$p_{3y} = -m_1 v_{1y} - m_2 v_{2y}$$

Środek masy

- Zakładaliśmy, że ciało porusza się zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona, ignorowaliśmy fakt, że może być ono zbudowane z wielu elementów.
- Postawmy więc problem: która część obiektu o fizycznych rozmiarach podlega ruchowi zgodnie z II zasadą dynamiki, gdy działają siły zewnętrzne, oraz w jaki sposób siły wewnętrzne i zewnętrzne zaburzają ruch ciała jako całości?

$$M = \sum_{j=1}^N m_j$$

$$\sum_{j=1}^N \vec{f}_{wj} = 0$$

$$\vec{F}_z = \sum_{j=1}^N \frac{d\vec{p}_j}{dt}$$

Środek masy

$$\vec{F}_z = \sum_{j=1}^N \frac{d\vec{p}_j}{dt}$$

- Powyższe równanie informuje nas, jaka będzie całkowita zmiana pędu całego ciała (wszystkich jego elementów) na skutek działania sił zewnętrznych;
- siły wewnętrzne nie mają wpływu na pęd ciała jako całości;
- tego powodu nie możemy np. samych siebie podnieść za włosy.

Układy cząstek

Okazuje się, że możemy określić część obiektu o fizycznych rozmiarach, która podlega ruchowi zgodnie z II zasadą dynamiki – opis ruchu tej części pomaga w opisie ruchu całego ciała.

Środek masy ciała lub układu ciał to punkt, który porusza się tak, jak gdyby była w nim skupiona cała masa układu, a wszystkie siły zewnętrzne były przyłożone w tym właśnie punkcie.



$$\vec{r}_{\text{SM}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j$$

Układy cząstek

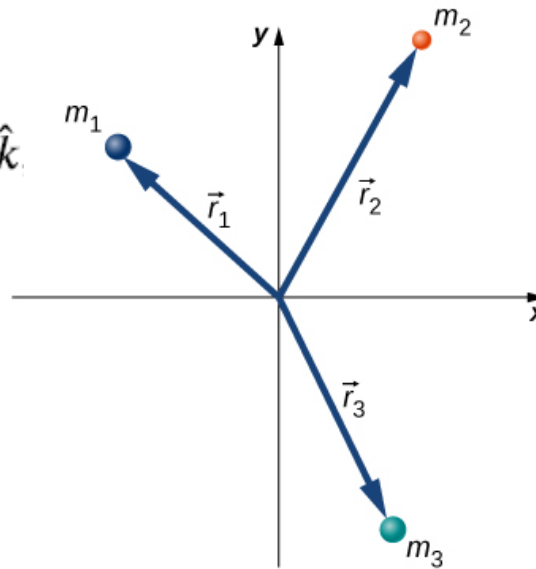
Środek masy

$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = r_{\text{ŚM}x} \hat{i} + r_{\text{ŚM}y} \hat{j} + r_{\text{ŚM}z} \hat{k}$$

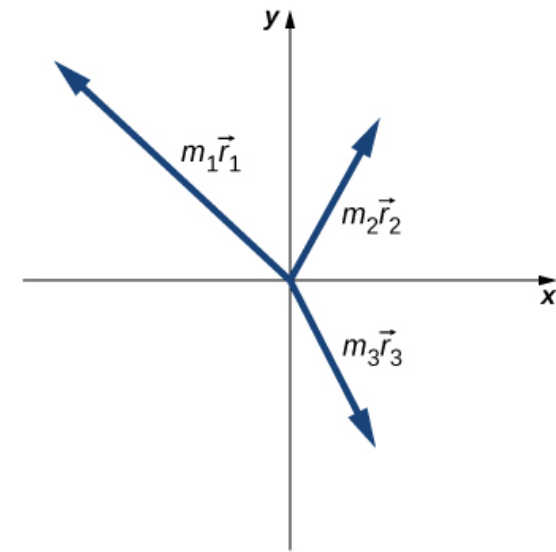
$$r_{\text{ŚM}x} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j x_j$$

$$r_{\text{ŚM}y} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j y_j$$

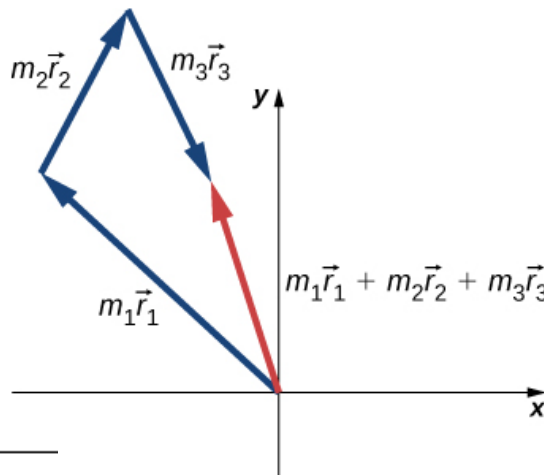
$$r_{\text{ŚM}z} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j z_j$$



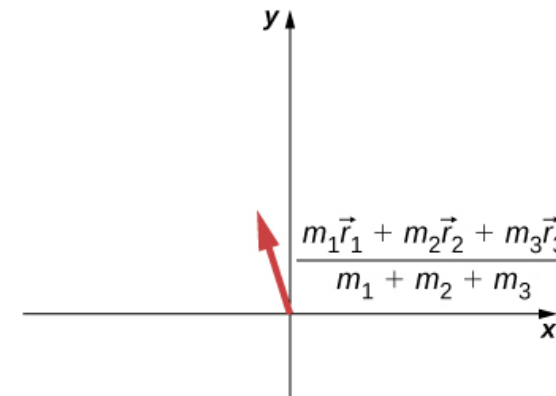
(a)



(b)



(c)

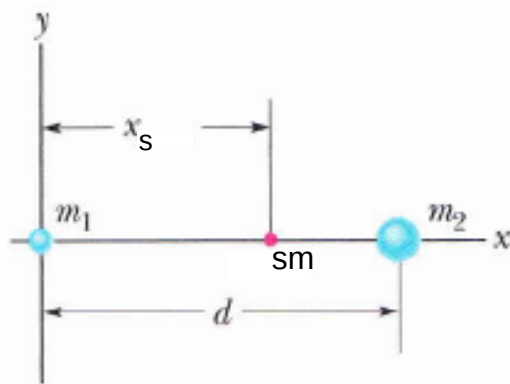


(d)

$$r_{\text{ŚM}} = |\vec{r}_{\text{ŚM}}| = \sqrt{r_{\text{ŚM}x}^2 + r_{\text{ŚM}y}^2 + r_{\text{ŚM}z}^2}$$

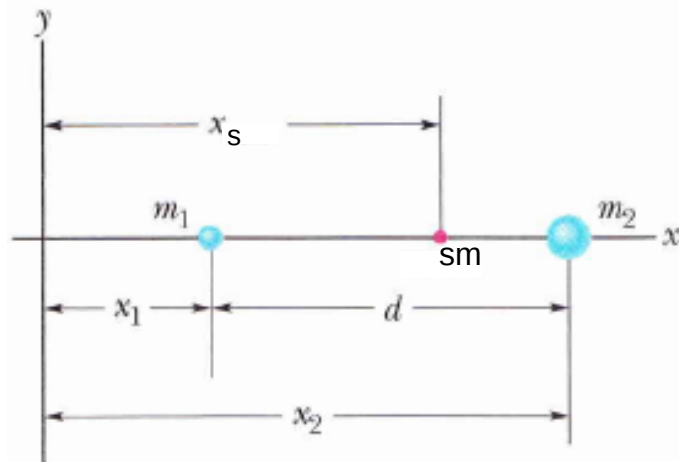
Układy cząstek

Środek masy



(a)

$$x_s = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$$

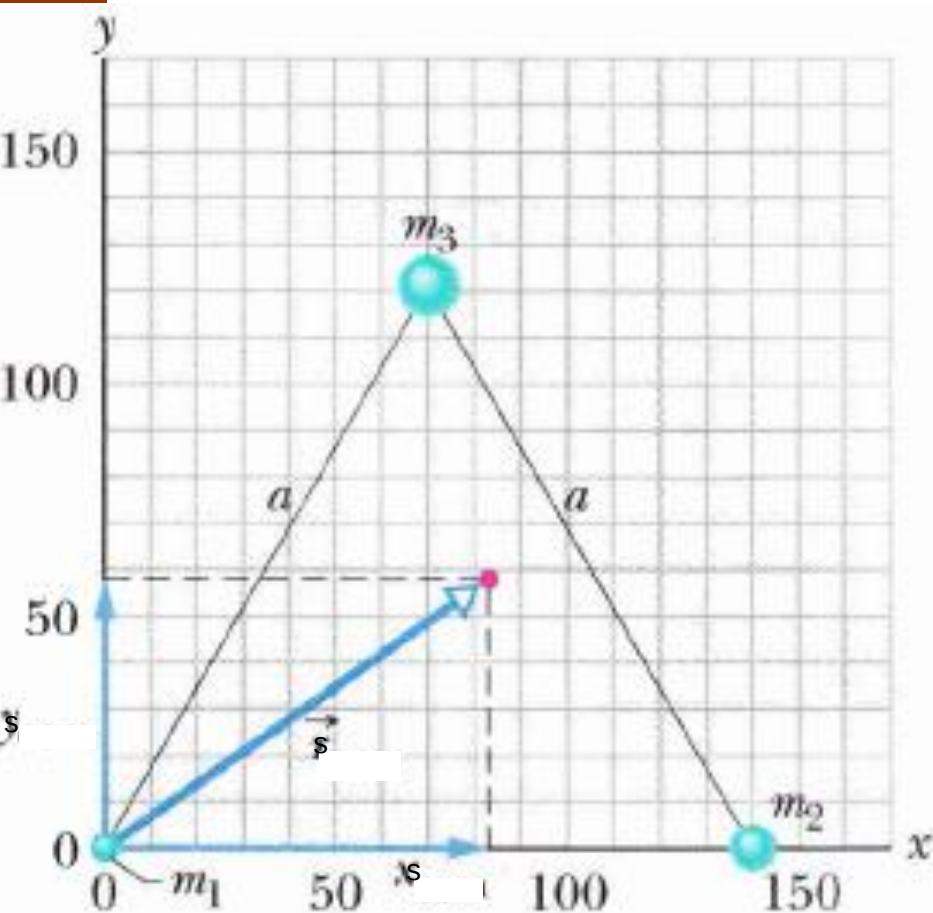


(b)

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Układy cząstek

Środek masy układu ciał. Przykład.



cząstka	masa (kg)	x (cm)	y (cm)
1	1.2	0	0
2	2.5	140	0
3	3.4	70	120

Układy cząstek

II zasada dynamiki Newtona dla układu cząstek

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = M\vec{a}_s$$

F_{wyp} – wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych,
 M – całkowita masa układu. Nie może się zmieniać – **układ zamknięty**.
 a_s – przyspieszenie środka masy

$$\vec{a}_s = \frac{d\vec{v}_s}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i$$

Układy cząstek

Prędkość i przyspieszenie środka masy

Prędkość środka masy

The diagram shows the formula for the center of mass velocity, $\vec{v}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$, enclosed in a double-lined box. Four labels with leader lines point to specific parts of the formula: 'masy poszczególnych ciał' points to the summation index i ; 'wektor prędkości ciała o masie m_i ' points to $\vec{v}_i$; 'masa całego układu $M = \sum_{i=1}^N m_i$ ' points to the denominator M ; and 'wektor prędkości środka masy układu ciał' points to $\vec{v}_s$.

$\vec{v}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$

masy poszczególnych ciał

wektor prędkości ciała o masie m_i

masa całego układu $M = \sum_{i=1}^N m_i$

wektor prędkości środka masy układu ciał

Przyspieszenie środka masy

The diagram shows the formula for the center of mass acceleration, $\vec{a}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i$, enclosed in a double-lined box. Two labels with leader lines point to parts of the formula: 'wektor przyspieszenia ciała o masie m_i ' points to $\vec{a}_i$; and 'wektor przyspieszenia środka masy układu ciał' points to $\vec{a}_s$.

$\vec{a}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i$

wektor przyspieszenia ciała o masie m_i

wektor przyspieszenia środka masy układu ciał

Układy cząstek

Pęd układu cząstek

Pęd środka masy

The diagram shows the equation for the momentum of a system of particles enclosed in a double-lined rectangular box. Four labels with leader lines point to specific parts of the equation: 'Pęd środka masy' points to $\vec{p}_s$, 'prędkość środka masy' points to $\vec{v}_s$, 'pęd i -tego ciała, $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ ' points to $\vec{p}_i$, and 'pęd układu ciał' points to $\vec{P}$.

$$\vec{p}_s = M \vec{v}_s = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \vec{P}$$

prędkość środka masy

pęd i -tego ciała, $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$

pęd układu ciał

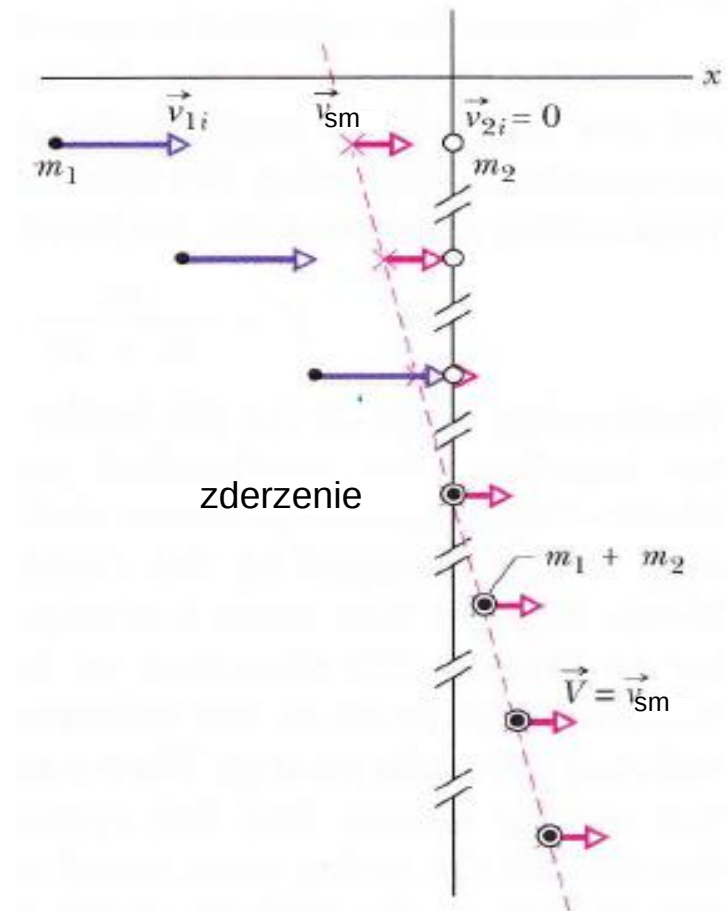
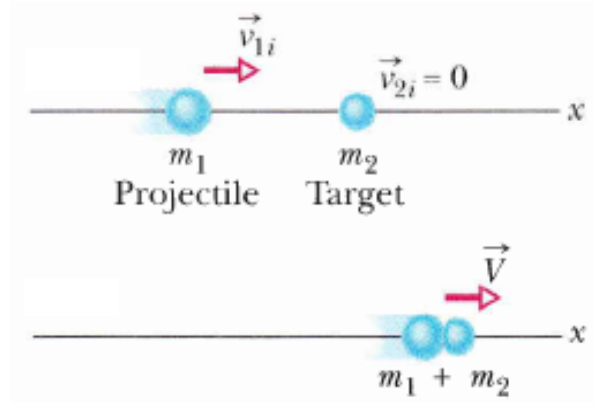
II zasada dynamiki dla
układu cząstek

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Zderzenia

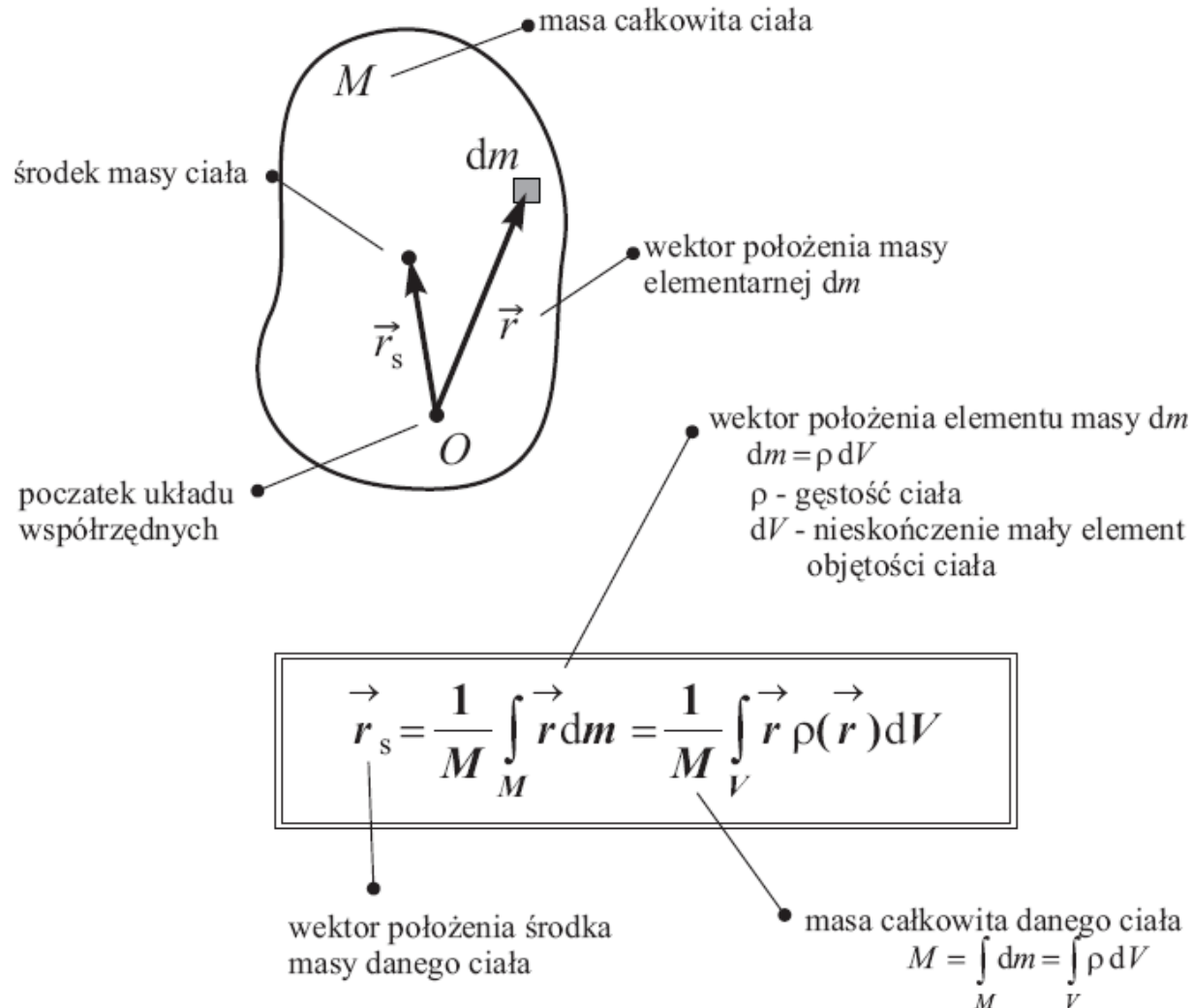
Zderzenia niesprężyste w jednym wymiarze – prędkość środka masy

Prędkość środka masy układu zamkniętego i izolowanego nie może się zmieniać.



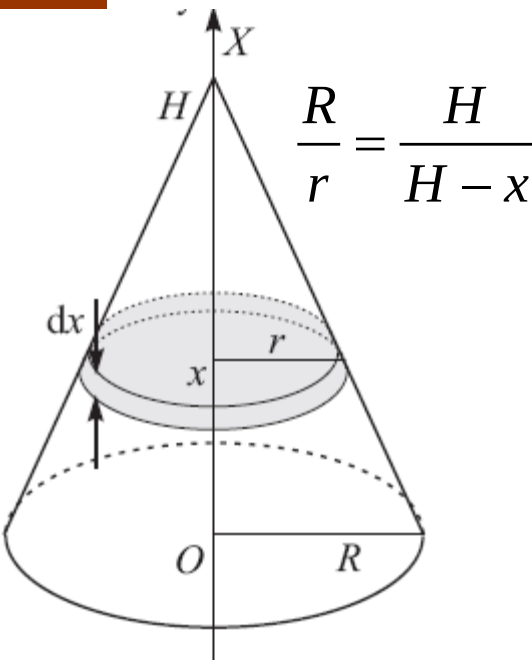
Układy cząstek

Środek masy – ciało rozciągnięte



Układy cząstek

Środek masy – ciało rozciągłe. Przykład.



$$x_s = \frac{1}{M} \int_M x \, dm$$

$$M = \rho V = \rho \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

$$dm = \rho \frac{(H-x)^2}{H^2} \pi R^2 dx$$

$$x_s = \frac{1}{4} H$$

stożek jest bryłą symetryczną – środek masy
leży na osi symetrii

Dziękuję za uwagę!