

Fizyka 1B

Wykład 4

dr Piotr Sitarek, prof. uczelni

**Katedra Fizyki Doświadczalnej
Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej**

Egzamin

I termin 9 luty 2026 (poniedziałek) godz. 11.15

II termin 16 luty 2026 (poniedziałek) godz. 11.15

Praca i energia

- Praca
- Energia kinetyczna
- Zasada zachowania energii mechanicznej
- Moc
- Energia potencjalna układu
- Siły zachowawcze i niezachowawcze
- Zasada zachowania energii
- Źródła energii

Energia i praca

Energia – wielkość skalarna charakteryzująca stan (lub własność) ciała lub układu ciał.

Praca

- W fizyce praca (ang.work) oznacza jedną z możliwych form energii.
- O pracy mówimy wtedy, gdy siła działająca na dane ciało powoduje jego przemieszczenie.

Praca W jest to energia przekazana ciału lub od niego odebrana na drodze działania na ciało siły.

- Siła może zależeć od przemieszczenia, a przemieszczenie może następować na dowolnej drodze pomiędzy dwoma punktami.
- Gdy energia jest przekazywana ciału – praca jest dodatnia.
- Gdy energia jest ciału odbierana – praca jest ujemna.

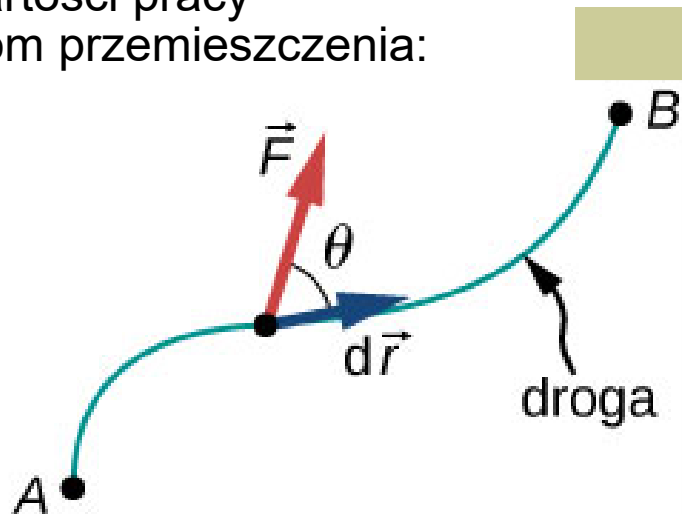
Praca

- Na początku zdefiniujemy nieskończenie mały przyrost pracy dW związany z działaniem siły $\vec{F}$ na nieskończenie małej drodze, odpowiadającej nieskończenie małemu przemieszczeniu $d\vec{r}$.
- Wówczas możemy pracę definiujemy następująco:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \theta$$

- czyli jako iloczyn skalarny siły i przemieszczenia, które spowodowała.
- W celu wyznaczenia całkowitej wartości pracy działającej na całkowitej drodze od A do B, odpowiadającej całkowitemu przemieszczeniu, należy dodać do siebie wszystkie dyskretne wartości pracy odpowiadające nieskończenie małym przyrostom przemieszczenia:

$$W_{AB} = \int_{\text{droga AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Praca

Praca stałej siły

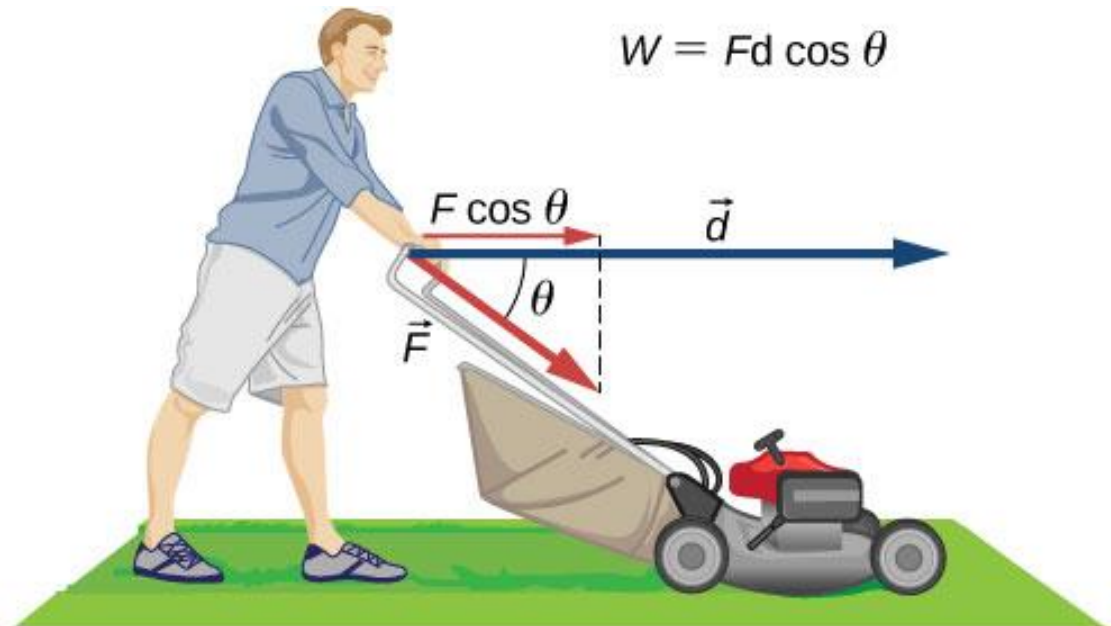
- Najprostszym przypadkiem pracy jest praca wykonana przez siłę o stałej wartości, zwrocie i kierunku

$$W_{AB} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = |\vec{F}| |\vec{r}_B - \vec{r}_A| \cos \theta$$

Praca

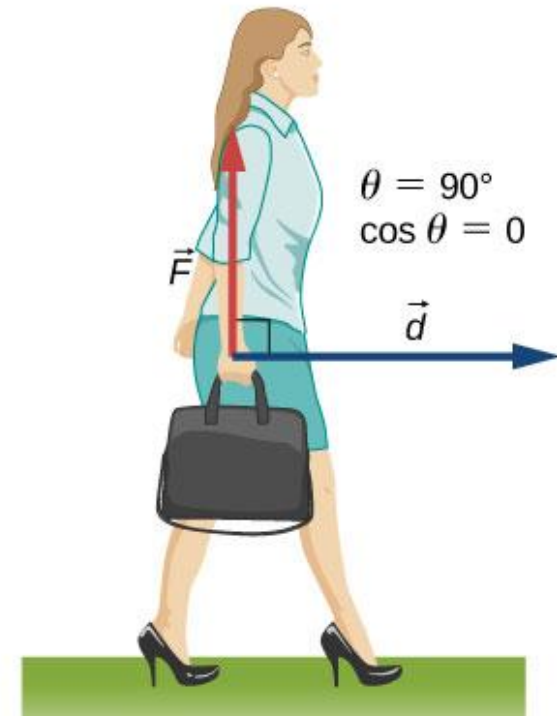
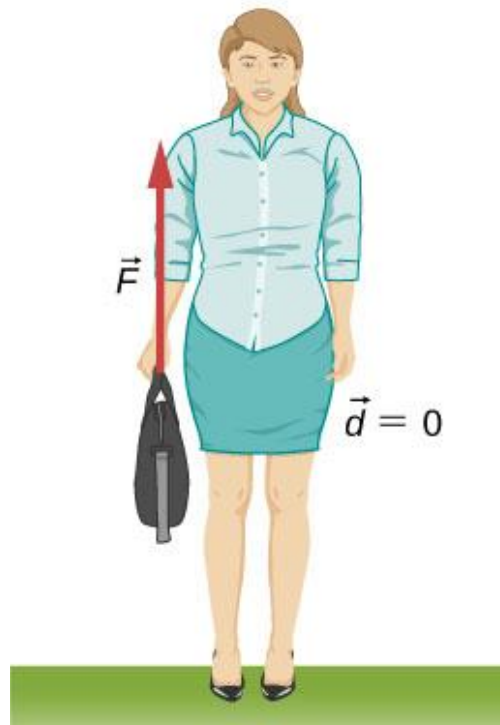
Praca stałej siły - przykłady

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \theta$$



Praca

Praca stałej siły - przykłady



Praca

Praca stałej siły - przykłady

- Praca siły ciężkości na drodze od A do B

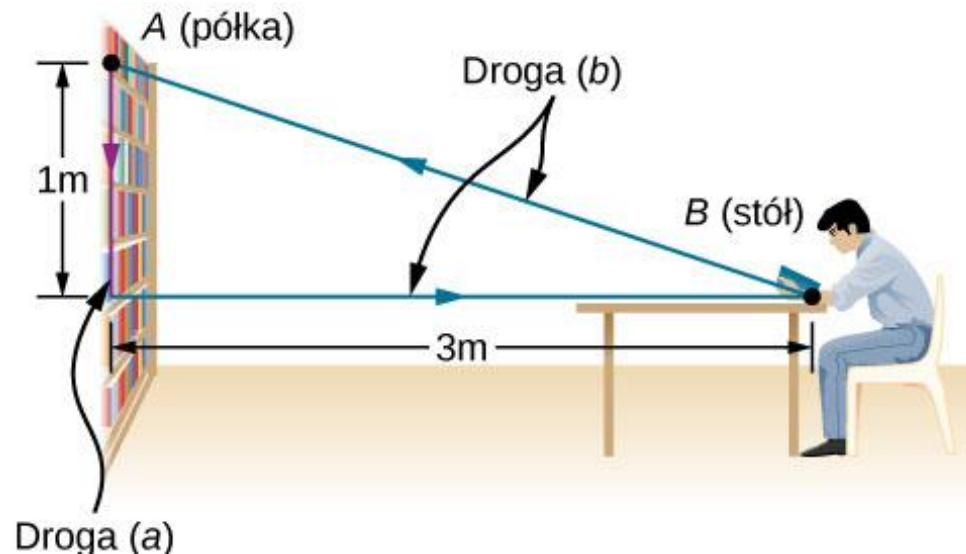
$$W_{\text{graw}AB} = -mg\hat{j} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = -mg(y_B - y_A)$$

- Praca wykonana przez stałą siłę grawitacji zależy tylko od ciężaru ciała oraz różnicy wysokości (przemieszczenia), na której ta siła działa.
- Zgodnie z przyjętym kierunkiem, wartość pracy siły grawitacji przy ruchu w górę jest ujemna - innymi słowy to ty wykonujesz prace podnosząc przedmiot.
- W przypadku ruchu w dół praca jest dodatnia.

Praca

Praca stałej siły - przykłady

- Zdejmujesz książkę o ciężarze 20 N z półki znajdującej się na wysokości 1 m powyżej blatu stołu, następnie przenosisz ją poziomo 3 m i odkładasz na stół.
- Jaką pracę wykonała siła grawitacji w tym ruchu?
- Po skończonym czytaniu odkładasz książkę na półkę. Jaką całkowitą pracę przeciw sile grawitacji wykonujesz?



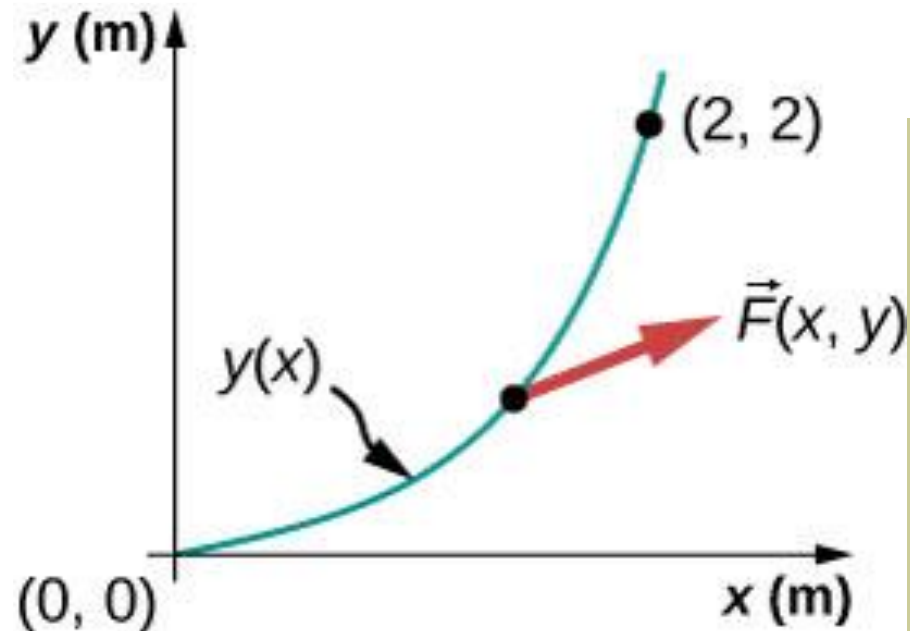
Praca

Praca zmiennej siły - przykład

- Ciało porusza się po paraboli o równaniu $y \text{ [m]} = 0,5 x^2$ od punktu w początku układu współrzędnych $A = (0; 0) \text{ m}$ do punktu o współrzędnych $B = (2; 2) \text{ m}$ na skutek działania siły

$$\vec{F} = 5 \text{ N/m} \cdot y \hat{i} + 10 \text{ N/m} \cdot x \hat{j}$$

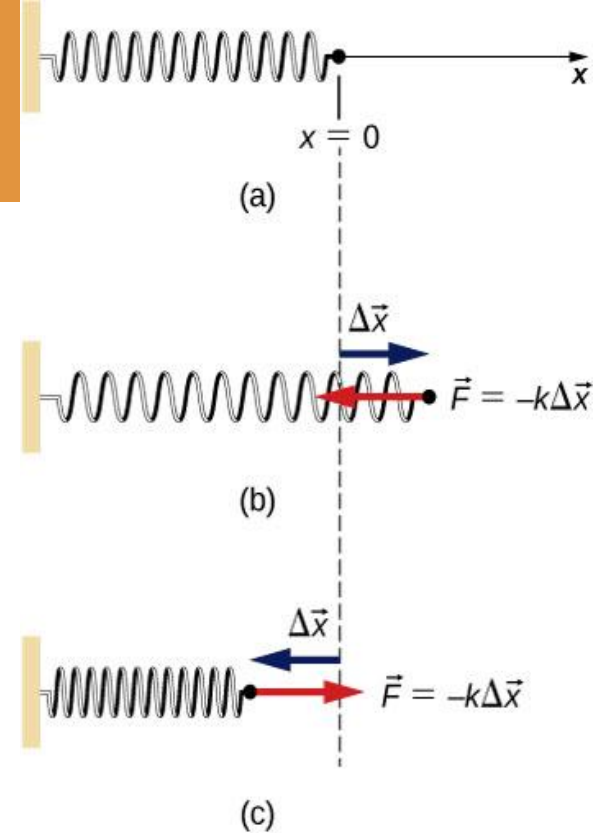
- Oblicz wykonaną pracę.



Praca

Praca siły sprężystości

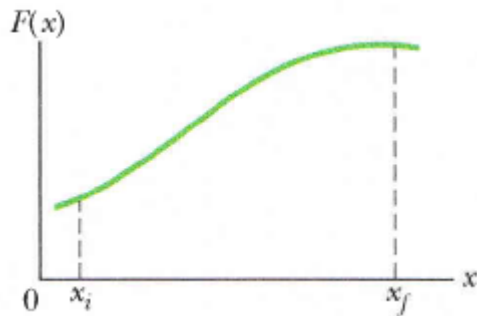
- siła sprężystości dla idealnej sprężyny
 $\vec{F} = -k\Delta\vec{x}$
- odkształcenie liniowe sprężyny $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0$
- praca przy rozciąganiu sprężyny z x_A do x_B wynosi



$$W_{\text{spr}AB} = \int_A^B F_x dx = -k \int_A^B x dx = -k \left[\frac{x^2}{2} \right]_A^B = -\frac{1}{2}k (x_B^2 - x_A^2)$$

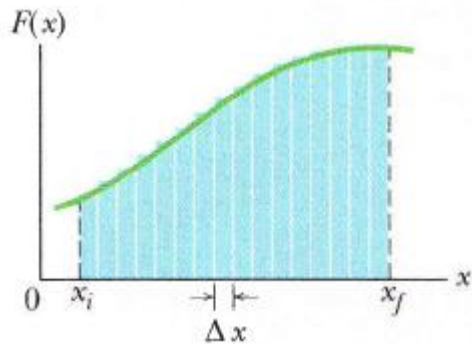
Praca

Praca wykonana przez dowolną siłę zmienną



$$\Delta W_j = F_j \Delta x$$

$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j F_j \Delta x$$



W trzech wymiarach

$$W = \int_{x_{pocz}}^{x_{końc}} F_x dx + \int_{y_{pocz}}^{y_{końc}} F_y dy + \int_{z_{pocz}}^{z_{końc}} F_z dz$$

Energia

Energia kinetyczna

- Możemy przypuszczać, że im większa prędkość ciała, w tym większym stopniu dane ciało może oddziaływać na inne. Nie zależy to od kierunku wektora prędkości, a tylko od jego wartości.
- Energia związana z ruchem ciała – energia kinetyczna:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Jednostką energii jest **dżul**.

$$1 \text{ dżul} = 1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$$

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Energia

Energia kinetyczna

- Jako że prędkość jest wielkością względną, zależną od przyjętego układu odniesienia, wartość energii kinetycznej również zależy od przyjętego układu.

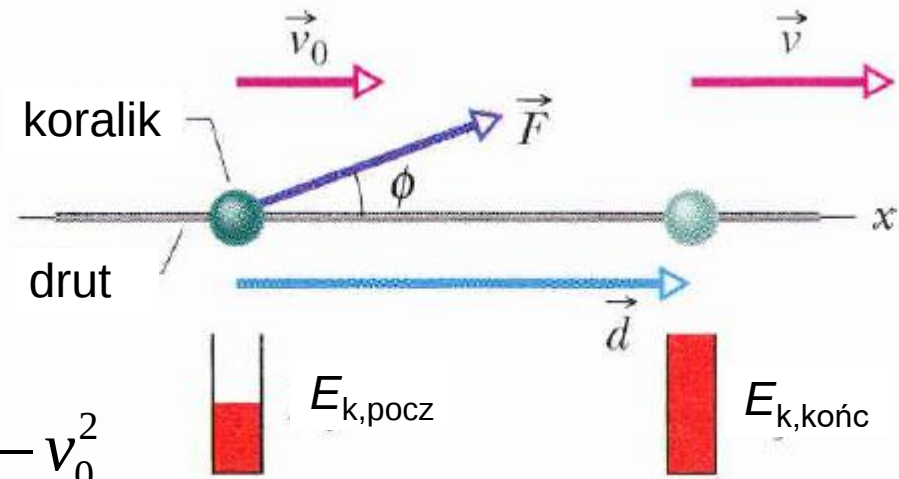
Energia i praca

Praca

$$\begin{cases} v = v_0 + a_x t \\ d = v_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2 \end{cases} \rightarrow 2a_x d = v^2 - v_0^2$$

$$ma_x d = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

$$F_x d = W \rightarrow W = Fd \cos \phi$$



$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

Energia i praca

Praca a energia kinetyczna, cd

$$W = \int_{x_{pocz}}^{x_{końc}} F(x) dx = \int_{x_{pocz}}^{x_{końc}} m a dx$$

$$m a dx = m \frac{dv}{dt} dx$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

$$m a dx = m \frac{dv}{dx} v dx = m v dv$$

$$W = \int_{v_{pocz}}^{v_{końc}} m v dv = \frac{m v_{końc}^2}{2} - \frac{m v_{pocz}^2}{2} = \Delta E_k$$

Energia i praca

Równoważność pracy i energii

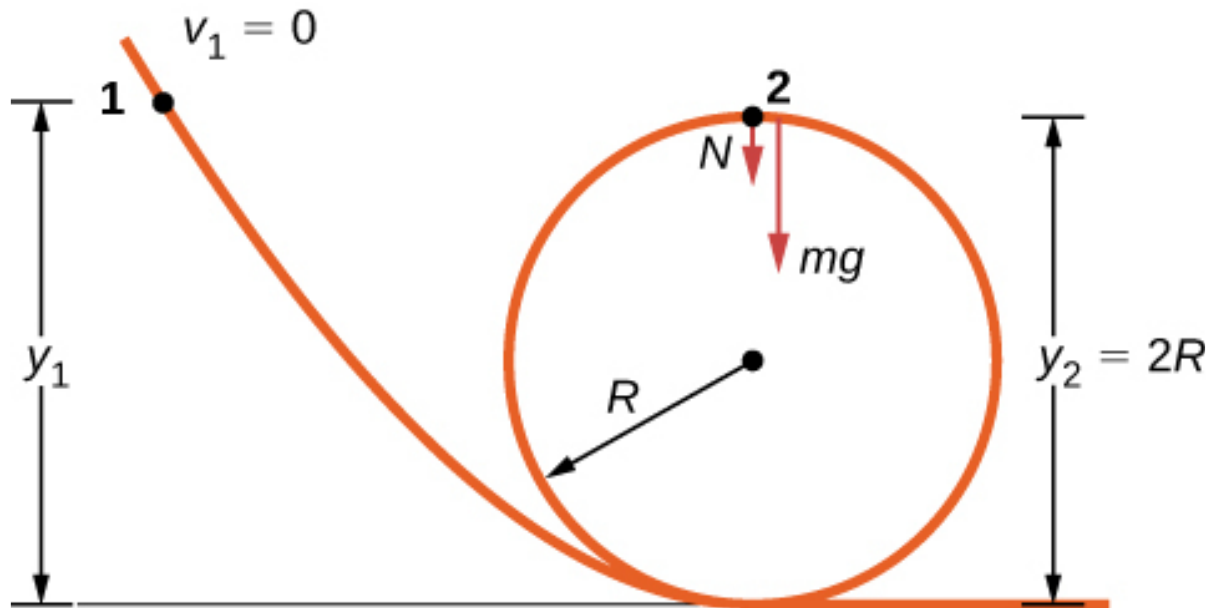
- Praca wypadkowa jest równa różnicy energii kinetycznych ciała:

$$W_{\text{wyp}} = E_B - E_A$$

- jest to szczególny przypadek zasady zachowania energii,
- kiedy dane ciało zwalnia, zmniejsza się jego energia kinetyczna, co odpowiada ujemnej wartości pracy, która została wykonana przez siły działające na to ciało,
- kiedy ciało przyspiesza, praca ma wartość dodatnią,
- kiedy wyznaczamy wartość pracy wypadkowej, musimy uwzględnić wszystkie siły działające na ciało, a nie brać pod uwagę tych, które nie działają na ciało.

Energia i praca

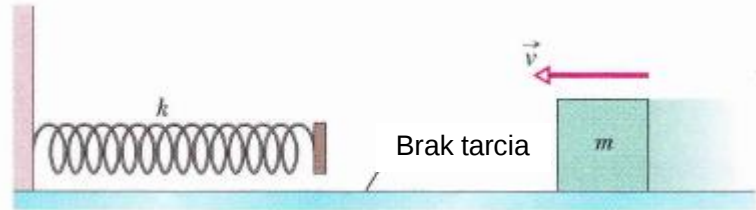
Równoważność pracy i energii



- Z jakiej wysokości (względem podstawy pętli) musi rozpocząć ruch samochodzik, aby przebyć całą pętlę, nie odrywając się od niej w żadnym jej punkcie?

Praca

Praca wykonana przez siłę sprężystości, przykład



$$m = 0,5\text{kg}$$

$$v = 0,5\text{m/s}$$

$$k = 750\text{N/m}$$

$$W_s = -\frac{1}{2}kd^2$$

$$E_{k,pocz} = \frac{mv^2}{2}, \quad E_{k,końc} = 0$$

$$0 - \frac{mv^2}{2} = -\frac{1}{2}kd^2$$

$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}} = 1,3\text{cm}$$

Energia i praca

Moc

- Aby powiązać ze sobą pracę i czas, w którym została wykonana, używamy nowego pojęcia – mocy.
- Jako że praca może być funkcją czasu, wprowadzono termin mocy średniej jako skończoną wartość pracy wykonanej w skończonym czasie:

$$P_{sr} = \frac{W}{\Delta t}$$

- Szybkość z jaką siła wykonuje pracę nazywamy mocą chwilową.

$$P = \frac{dW}{dt}$$

- jeśli praca ma wartość zmienną w czasie, to jej wartość jest wyrażana jako całka w postaci:

$$W = \int P dt$$

- jednostką mocy jest wat: $1 \text{ J/s} = \text{W}$

Energia i praca

Moc (dla stałej siły)

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cos \phi dx}{dt} = F \cos \phi v$$

Koń mechaniczny (James Watt)

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} = 33,000 \text{ ft} \cdot \text{lb/min}$$

$$1 \text{ hp} = 746 \text{ W} = 0.746 \text{ kW}$$

Kilowatogodzina

$$1 \text{ kW} \cdot \text{h} = (10^3 \text{ J/s}) (3600 \text{ s}) = 3.6 \times 10^6 \text{ J} = 3.6 \text{ MJ}$$



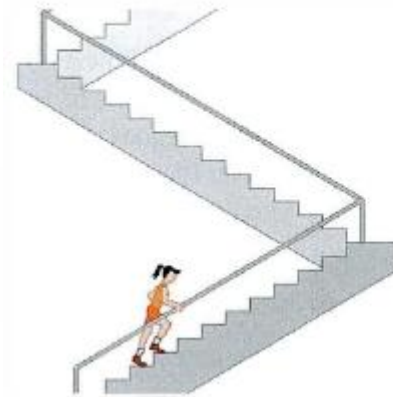
Energia i praca

Moc

Bieg na szczyt Sears Tower w Chicago

Wykonana przez biegaczkę praca

$$\begin{aligned} W &= mgh = (50.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(443 \text{ m}) \\ &= 2.17 \times 10^5 \text{ J} \end{aligned}$$



Średnia moc

$$P_{\text{av}} = \frac{2.17 \times 10^5 \text{ J}}{900 \text{ s}} = 241 \text{ W} = 0.241 \text{ kW} = 0.323 \text{ hp}$$

Energia i praca

Energia potencjalna

- pokazaliśmy, że praca wykonana przez siłę grawitacji działającą na ciało znajdujące się w pobliżu powierzchni Ziemi nie jest zależna od toru ruchu, a zależy jedynie od różnicy położeń: końcowego i początkowego,
- istnienie takiej zależności pozwala nam na wprowadzenie nowego, innego niż kinetyczna rodzaju energii – energii potencjalnej,
- aby wyznaczyć energię potencjalną w danym punkcie, powinniśmy porównać ją z wartością energii w punkcie, w którym jest ona znana.

$$\Delta E_p = E_p \left(\vec{r} \right) - E_p \left(\vec{r}_0 \right)$$

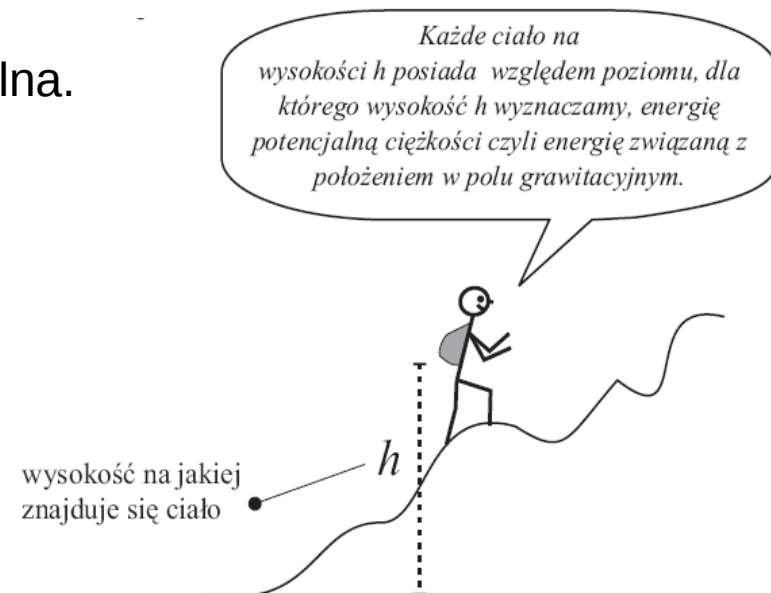
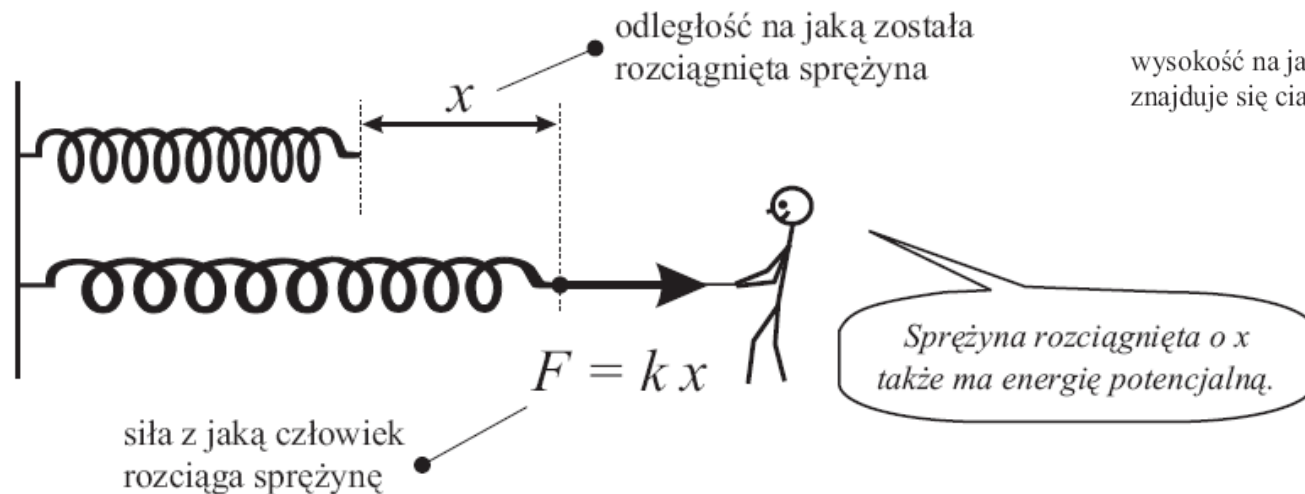
Energia i praca

Energia potencjalna

Energia potencjalna związana jest z konfiguracją (ustawieniem) układu ciał. Gdy zmienia się konfiguracja, może się również zmienić energia potencjalna E_p .

Grawitacyjna energia potencjalna.

Energia potencjalna sprężystości.



Energia i praca

Praca i energia potencjalna

- wykonanie pracy związanej z przeniesieniem ciała z położenia A do B wiąże się ze zmianą jego energii potencjalnej

$$\Delta E_{pAB} = E_{pB} - E_{pA} = -W_{AB}$$

- jeśli zaniedbamy siły tarcia i oporu powietrza, to zmiana energii kinetycznej ciała równa jest zmianie energii potencjalnej

$$\Delta E_{kAB} = \Delta E_{pAB}$$



Energia i praca

Energia potencjalna

- pokazaliśmy, że praca wykonywana nad ciałem przez siłę grawitacyjną Ziemi (w pobliżu jej powierzchni) zależy od jego masy, przyspieszenia ziemskiego i różnicy wysokości, którą ciało pokonało podczas swojego ruchu,
- z definicji, praca jest różnicą energii potencjalnej w polu grawitacyjnym Ziemi, wziętą ze znakiem minus, opisaną poniższym wzorem:

$$\Delta E_{p_{\text{graw}}} = -W_{\text{graw}}_{AB} = mg(y_B - y_A)$$

- co możemy zapisać także jako:

$$E_p(y) = mgy + \text{const}$$

Energia i praca

Energia potencjalna

Jaka jest energia potencjalna turysty o masie 75 kg

- u podstawy wzgórza,
- na szczycie
- na poziomie morza?

$$E_p(\text{podstawa}) = E_p(0) = 0 \text{ kJ}$$

$$E_p(\text{szczyt}) = E_p(147 \text{ m}) = mgh = 75 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 147 \text{ m} = 108 \text{ kJ}$$

$$E_p(\text{poziom morza}) = E_p(-48 \text{ m}) = mgh = 75 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (-48 \text{ m}) = -35,3 \text{ kJ}$$



Energia i praca

Energia potencjalna sprężystości

- wykazaliśmy, że praca wykonana przez idealną sprężynę, w jednym wymiarze, zależy wyłącznie od stałej sprężystości i kwadratu przemieszczenia (w odniesieniu do nierozciągniętej sprężyny),
- w związku z tym możemy zdefiniować pojęcie różnicy energii potencjalnej sprężystości

$$\Delta E_p = -W_{AB} = \frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$$

- lub

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \text{const}$$

- jeśli siła sprężystości jest jedyną siłą działającą w rozpatrywanym układzie, to najprościej jest przyjąć zero energii potencjalnej w $x = 0$, czyli wtedy, gdy sprężyna jest nierozciągnięta i $\text{const} = 0$.

Energia i praca

Obiekt lub zjawisko

Energia w
dżulach

Wielki Wybuch

$1,0 \cdot 10^{68}$

Roczne światowe zużycie energii

$4,0 \cdot 10^{20}$

Duża bomba termojądrowa (9 megaton)

$3,8 \cdot 10^{16}$

Niewielka rozszczepieniowa bomba atomowa (np. jak ta zrzucona na Hiroszimę; 10 kiloton)

$4,2 \cdot 10^{13}$

1 baryłka ropy naftowej

$5,9 \cdot 10^9$

1 tona trotylu

$4,2 \cdot 10^9$

1 galon benzyny (ok. 4 litry)

$1,2 \cdot 10^8$

Zalecana dzienna dawka spożycia dla dorosłego człowieka

$1,2 \cdot 10^7$

Samochód o masie 1000 kg i prędkości 90 km/h

$3,1 \cdot 10^5$

Piłka tenisowa o prędkości 100 km/h

22

Komar (10^{-2} g o prędkości 0,5 m/s)

$1,3 \cdot 10^{-6}$

Pojedynczy elektron w kineskopie telewizora

$4,0 \cdot 10^{-15}$

Energia i praca

Siły zachowawcze i niezachowawcze

Gdy w układzie działa siła, która wykonując pracę nad ciałem powoduje zamianę energii kinetycznej na potencjalną i przy zmianie konfiguracji siła wykonuje pracę zamieniając energię potencjalną w energię kinetyczną, to taką siłę nazywamy siłą zachowawczą.

Praca wykonana przez siłę zachowawczą nie zależy od drogi po jakiej porusza się cząstka.

$$W_{AB \text{ droga } 1} = \int_{AB \text{ droga } 1} \vec{F}_{\text{zach}} \cdot d\vec{r} = W_{AB \text{ droga } 2} = \int_{AB \text{ droga } 2} \vec{F}_{\text{zach}} \cdot d\vec{r}$$

Energia i praca

Siły zachowawcze i niezachowawcze

Praca wykonana przez siłę zachowawczą nie zależy od drogi po jakiej porusza się cząstka.

$$W_{\text{droga zamk.}} = \oint \vec{E}_{\text{zach}} \cdot d\vec{r} = 0$$

Przy rozpatrywaniu zagadnienia w **dwóch wymiarach**, siła jest zachowawcza, gdy spełniona jest zależność

$$\frac{dF_x}{dy} = \frac{dF_y}{dx}$$

Energia i praca

Zachowanie energii mechanicznej

$$E_{mech} = E_k + E_p$$

Gdy działa siła zachowawcza, to

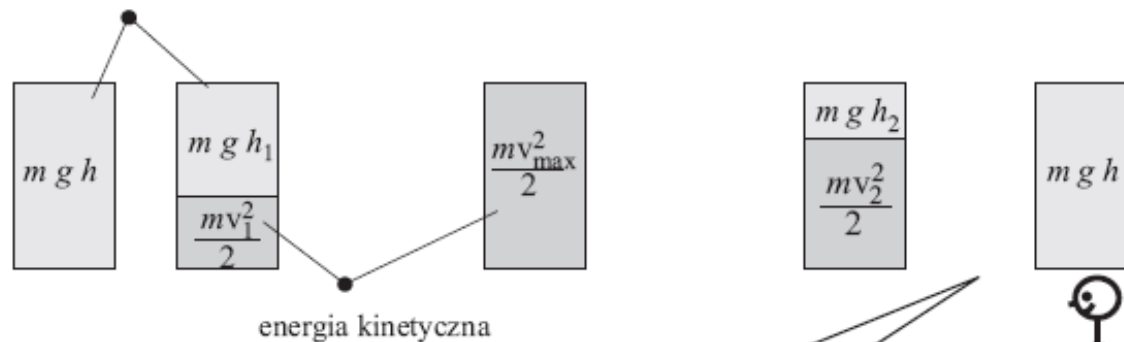
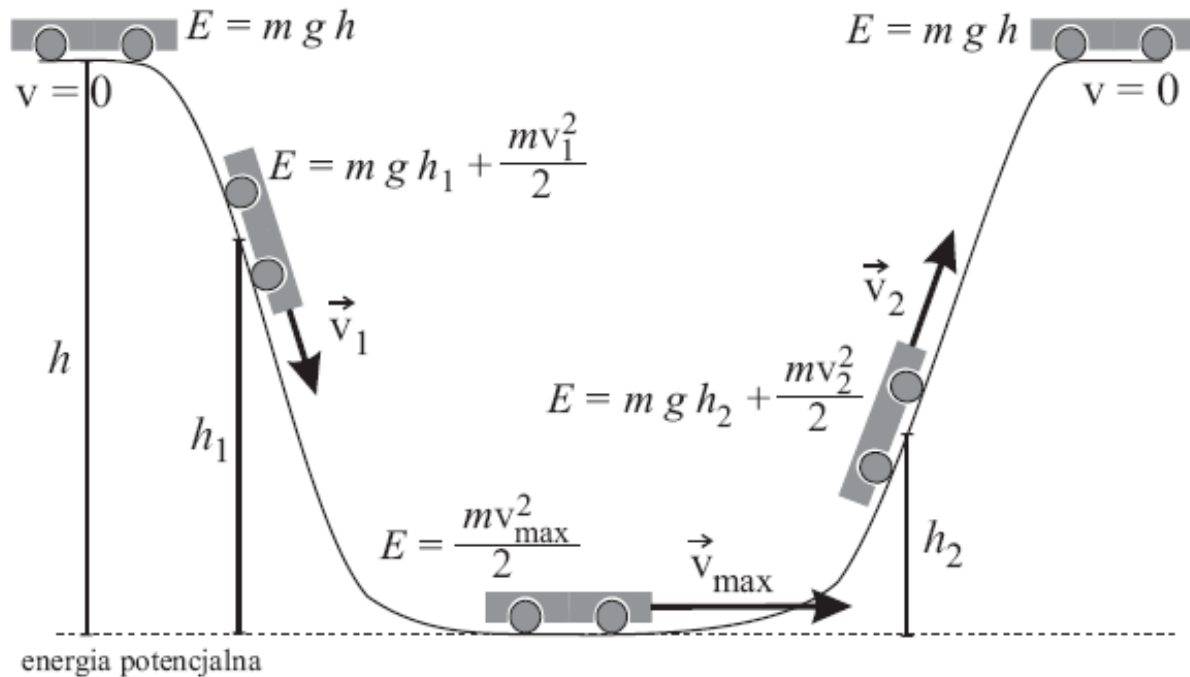
$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

$$\Delta E_{mech} = \Delta E_k + \Delta E_p = 0$$

W układzie izolowanym, w którym zamiana energii pochodzi jedynie od sił zachowawczych energia kinetyczna i energia potencjalna mogą się zmieniać, lecz ich suma (energia mechaniczna) nie może ulegać zmianie.

Energia i praca

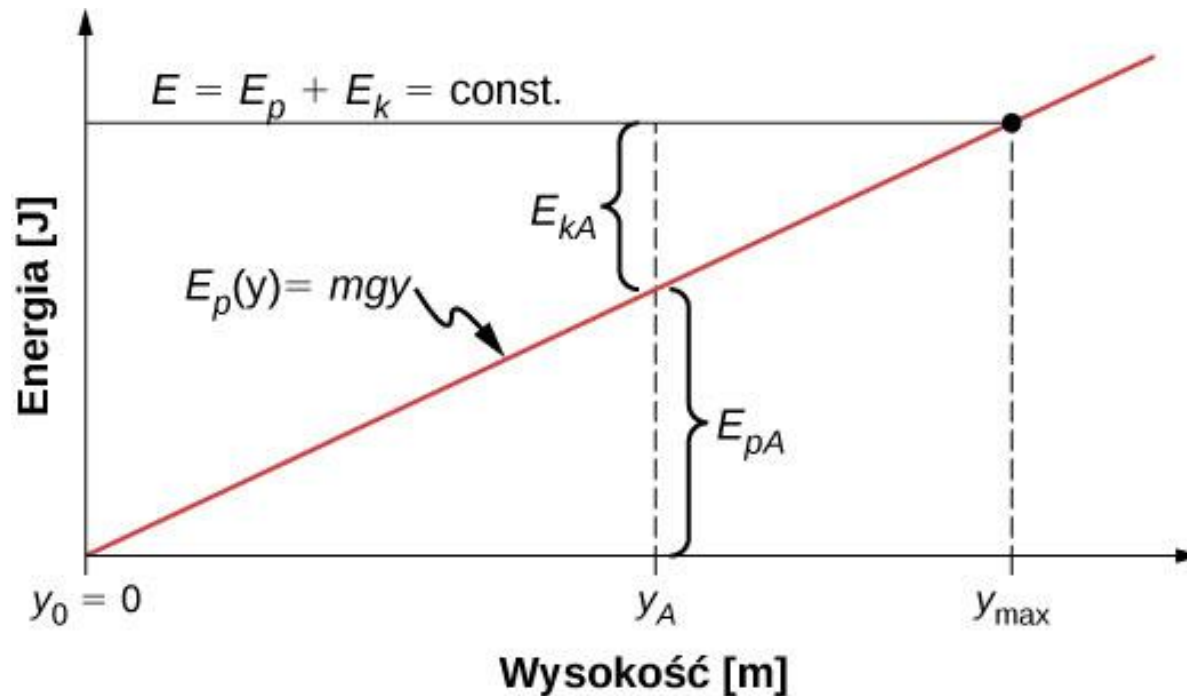
Przykład



Sumaryczna powierzchnia części jasnej i ciemniejszej pozostaje stała.

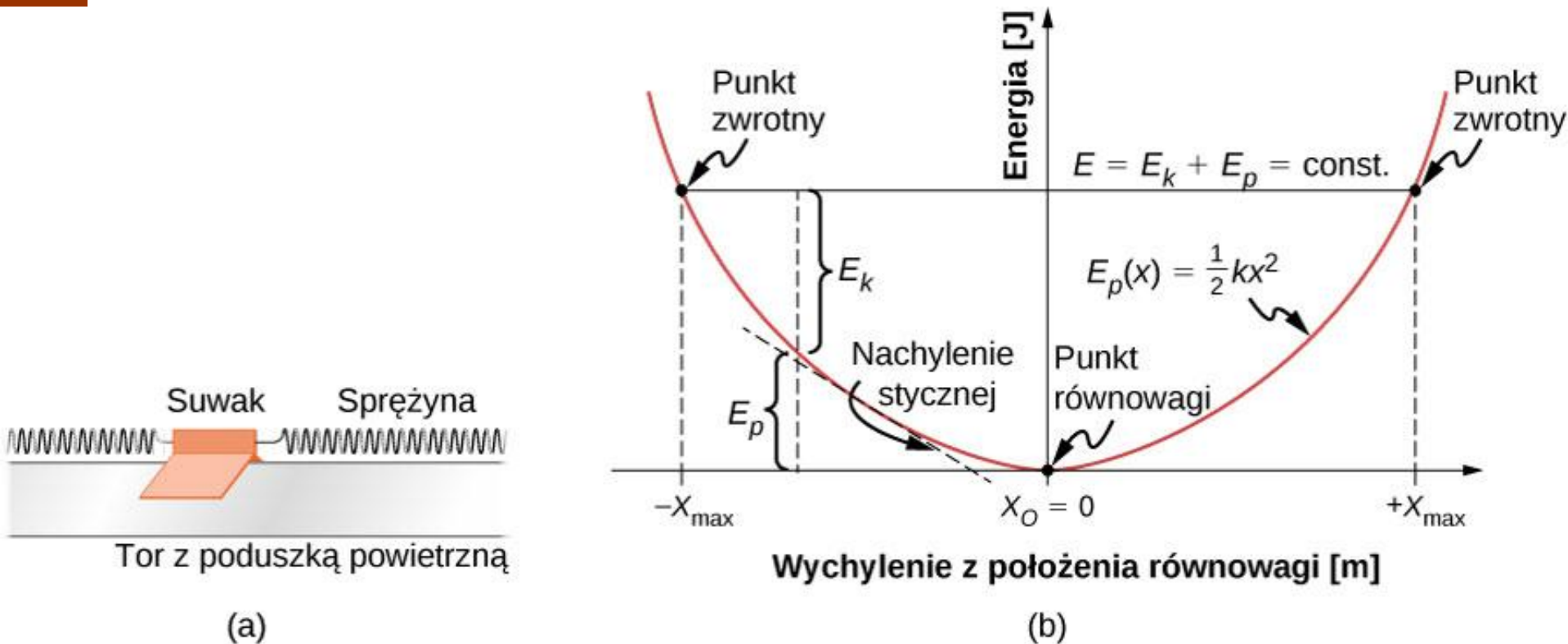
Energia i praca

ciało spadające swobodnie w pobliżu powierzchni Ziemi (pomijamy siły oporu)



Energia i praca

układ masa-sprężyna umieszczony na nieruchomej, poziomej płaszczyźnie, po której układ porusza się bez tarcia, w taki sposób, że siła grawitacji oraz siła reakcji podłoża nie wykonują żadnej pracy



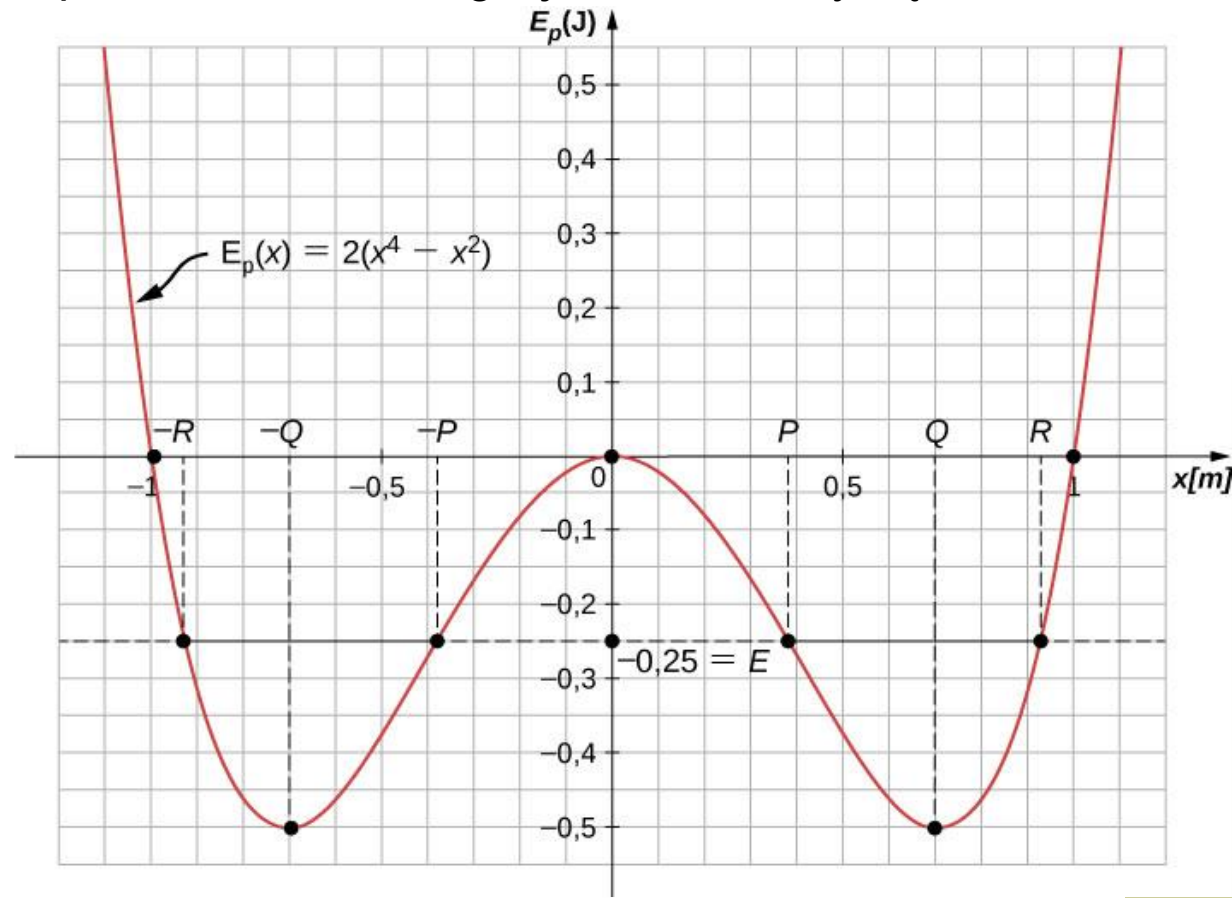
Energia i praca

Energia potencjalna cząstki poruszającej się wzdłuż osi jest dana relacją

$$E_p(x) = 2(x^4 - x^2)$$

energia mechaniczna jest stała i wynosi $-0,25 \text{ J}$

- co możemy powiedzieć o ruchu cząstki?
- czy istnieją jakiegokolwiek położenia równowagi i jeśli tak, to czy są one stabilne, czy nie?



Energia i praca

Praca wykonana nad układem przez siłę zewnętrzną

Praca jest równa energii przekazanej układowi lub odebranej od niego przez siłę zewnętrzną działającą na ten układ.

brak tarcia

$$W = \Delta E_k + \Delta E_p$$

tarcie

$$W = \Delta E_{mech} + \Delta E_{term}$$

Energia i praca

Zasada zachowania energii

Zmiana całkowitej energii E układu jest równa energii dostarczonej do układu lub od niego odebranej.

$$W = \Delta E = \Delta E_{mech} + \Delta E_{term} + \Delta E_{wewn}$$

Energia i praca

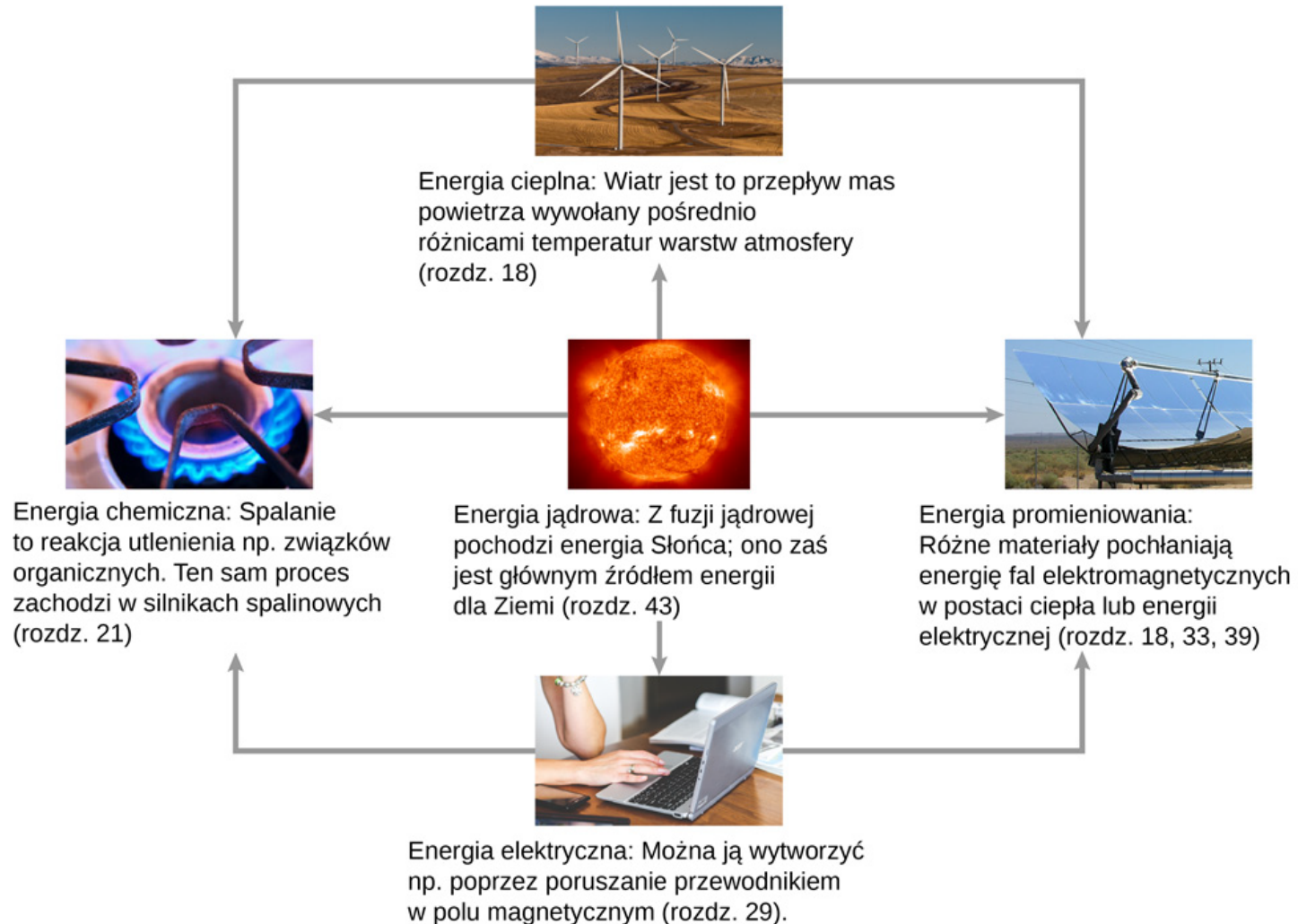
Układ izolowany

Całkowita energia E układu izolowanego nie może się zmieniać.

$$\Delta E = \Delta E_{mech} + \Delta E_{term} + \Delta E_{wewn} = 0$$

Energia i praca

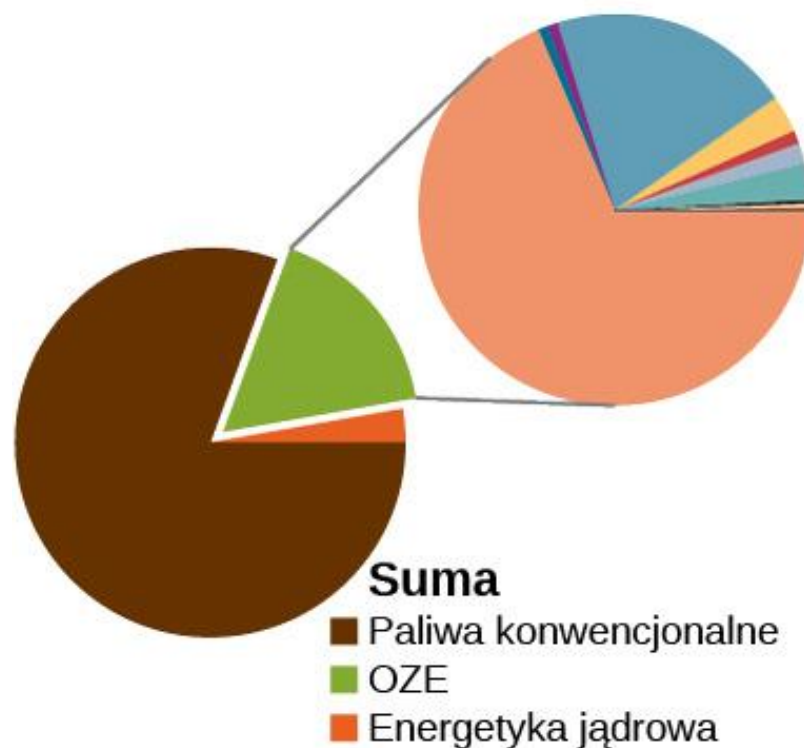
Źródła energii



Energia i praca

Źródła energii

Całkowite światowe zużycie energii (2010)



Odnawialne źródła energii (OZE)



Dziękuję za uwagę!