

Fizyka 1B

Wykład 12

dr Piotr Sitarek, prof. uczelni

Katedra Fizyki Doświadczalnej

Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej

Fale

- Fale biegnące
- Matematyczny opis fal
- Prędkość fali na naprężonej strunie
- Energia i moc fali
- Interferencja fal
- Fale stojące i rezonans

Fale

- Omawiając drgania przekonaliśmy się, że ruch drgający jest ważnym rodzajem ruchu - ponieważ pozwala wyjaśnić wiele zjawisk fizycznych.
- **Drgania** wytwarzają **fale**, a te z kolei odgrywają fundamentalną rolę w całej fizyce.
- Wiele pojęć i wzorów, które poznaliśmy przy okazji omawiania drgań można zastosować również do opisu ruchu falowego.

Fale

Rodzaje fal

- Pojęcie **fala** (ang. wave) oznacza zaburzenie, które rozchodzi się od miejsca, w którym powstało.
- Wyróżnia się trzy podstawowe typy fal:
mechaniczne, elektromagnetyczne i fale materii.
- **Fale mechaniczne** podlegają zasadom dynamiki Newtona i wymagają obecności ośrodka materialnego, czyli substancji, w której mogą się rozchodzić.
- Gdy ośrodek ulega odkształceniu, wówczas pojawiają się w nim siły sprężystości.
- Fale mechaniczne przenoszą energię i pęd ale nie masę.
- Przykładami fal mechanicznych są fale na wodzie, fale dźwiękowe i fale sejsmiczne.

Fale

Rodzaje fal

- **Fale elektromagnetyczne** są związane z drganiami pól elektrycznych i magnetycznych i nie wymagają obecności ośrodka.
- Popularne przykłady tego rodzaju fal to: promieniowanie gamma, promieniowanie rentgenowskie, promieniowanie ultrafioletowe, światło widzialne, promieniowanie podczerwone, mikrofae i fale radiowe.
- Fale elektromagnetyczne rozchodzą się w próżni z prędkością światła.

Fale

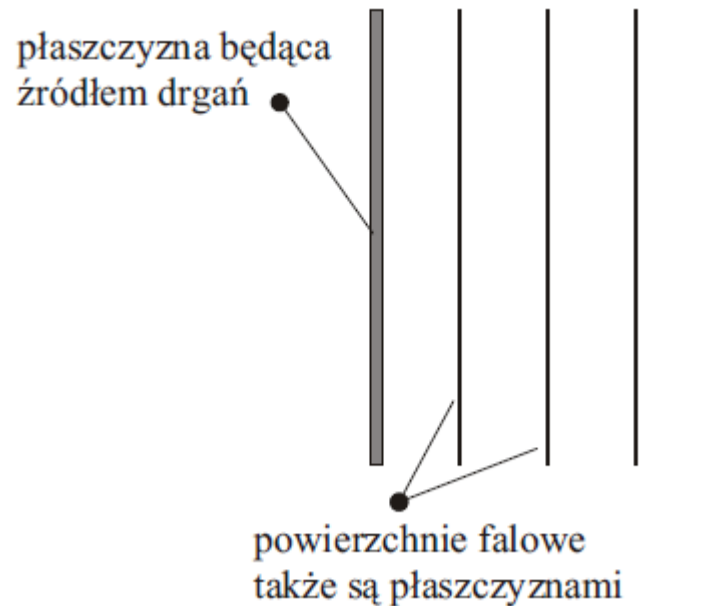
Rodzaje fal

- **Fale materii** (ang. matter waves) są kluczowym zagadnieniem działu fizyki znanego jako mechanika kwantowa.
- Są one związane z takimi cząstkami jak protony, elektrony, neutrony i inne występujące w przyrodzie cząstki elementarne.
- Teoria, według której każda cząstka materialna ma właściwości falowe, została po raz pierwszy sformułowana przez Louisa de Broglie'a w 1924 roku.

Fale

Rodzaje fal

Fala płaska - źródłem drgań jest płaszczyzna, której punkty drgają w tej samej fazie. Powierzchnie falowe także są płaszczyznami. Np. fale na powierzchni wody wywołane ruchem płaskiej deseczki (w tym przypadku płaszczyzna przechodzi w linię prostą).

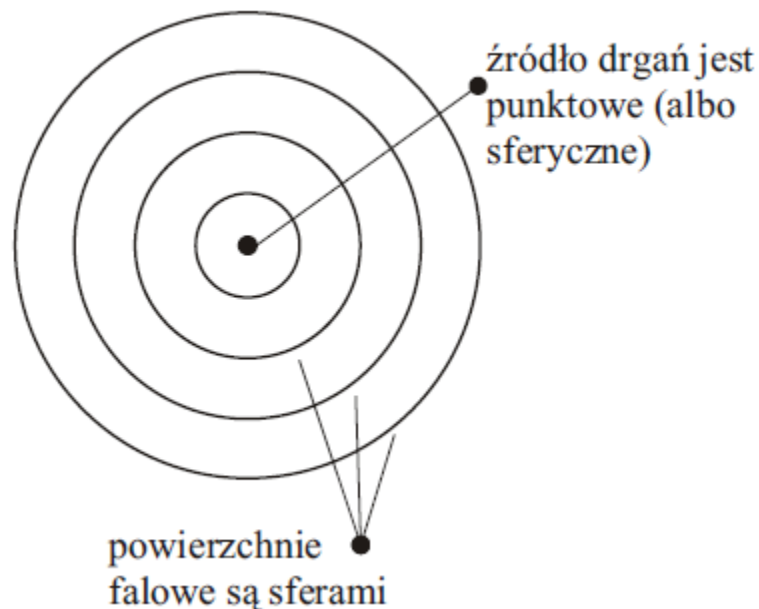


Fale

Rodzaje fal

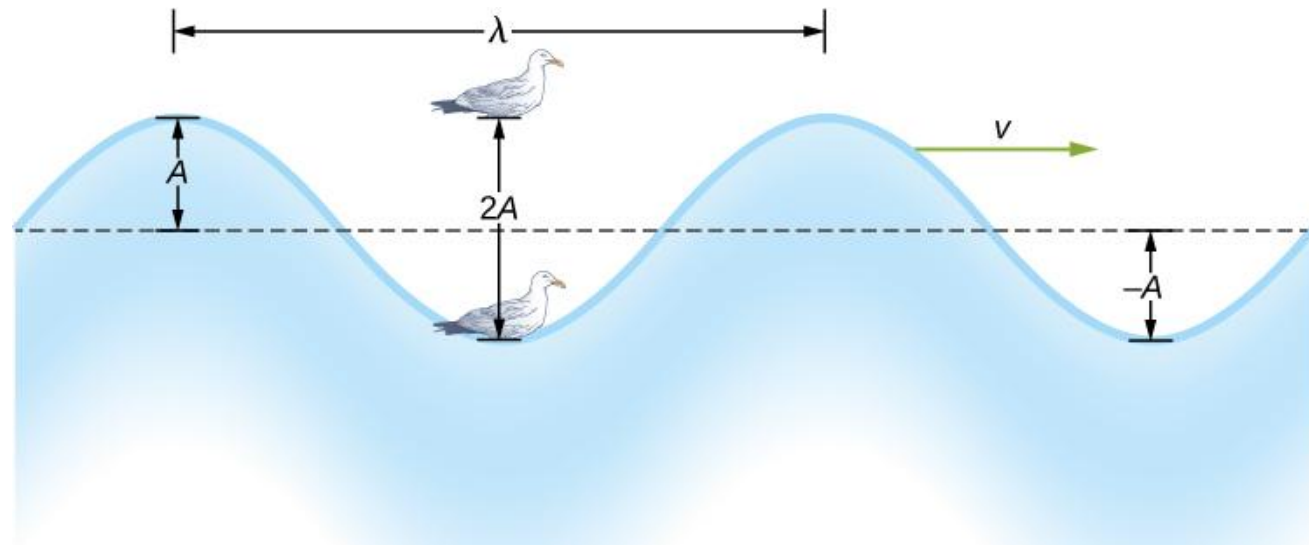
Fala kulista i kolista - źródłem drgań fali kulistej jest punkt (lub sfera).

Powierzchnie falowe są sferami, a amplituda drgań fali kulistej maleje z odległością od źródła. Np. fale po wrzuceniu kamienia do wody (powierzchnie falowe są okręgami).



Fale mechaniczne

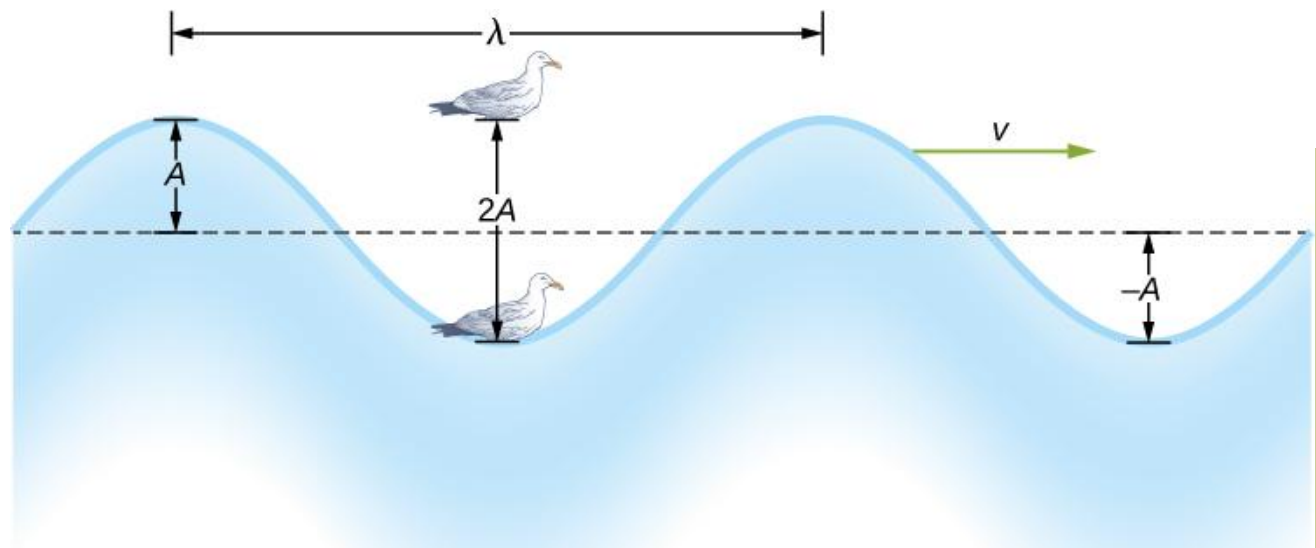
- Najprostsze fale mechaniczne są powtarzalne i charakteryzują się prostym ruchem harmonicznym.
- W przypadku fal na powierzchni wody cząsteczki wody wykonują ruch w płaszczyźnie pionowej, natomiast zaburzenie rozchodzi się w płaszczyźnie poziomej.
- Długość fali (λ – lambda) mierzy się pomiędzy dwoma podobnymi punktami ośrodka o tej samej wysokości i wychyleniu.



Fale mechaniczne

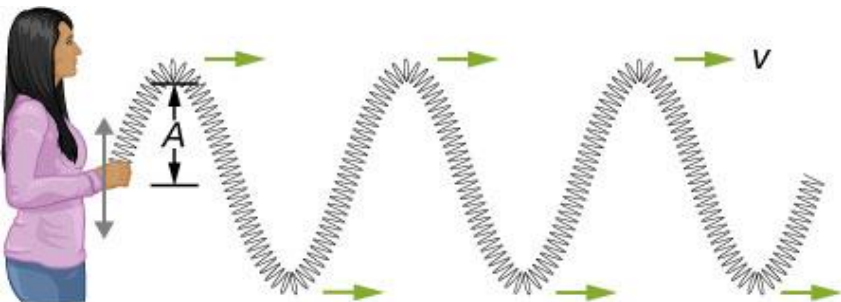
- Fala na wodzie rozchodzi się w ośrodku z prędkością v .

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

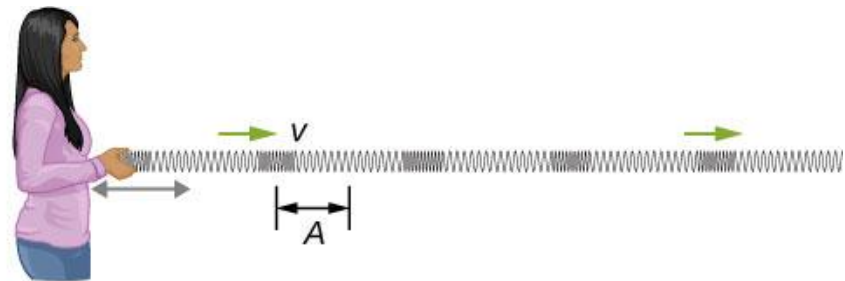


Fale mechaniczne

- Prosta fala mechaniczna składa się z okresowych zaburzeń, które rozchodzą się od jednego punktu ośrodka do drugiego.
- Gdy fala rozchodzi się w płaszczyźnie poziomej, natomiast zaburzenie ośrodka zachodzi w płaszczyźnie pionowej, taką falę nazywamy **falą poprzeczną** (ang. *transverse wave*).
- Fala poprzeczna może się rozchodzić w dowolnym kierunku, ale zaburzenie ośrodka zachodzi w kierunku prostopadłym do kierunku rozchodzenia się fali.
- Gdy zaburzenie zachodzi w kierunku równoległym do kierunku rozchodzenia się fali, to mamy do czynienia z **falą podłużną** (ang. *longitudinal wave*).
- Wielkość zaburzenia odpowiada amplitudzie fali.

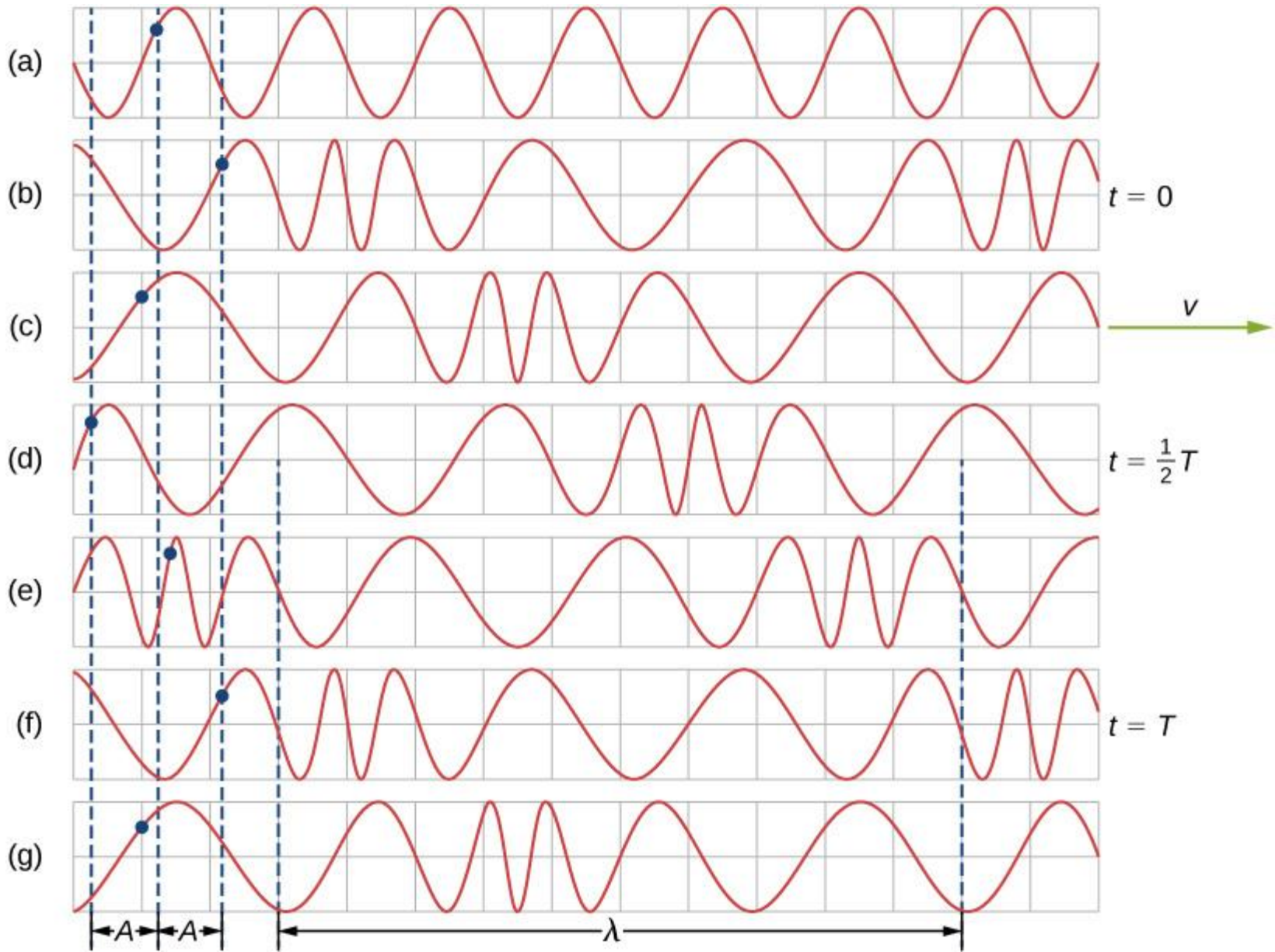


(a) Fala poprzeczna



(b) Fala podłużna

Fale mechaniczne

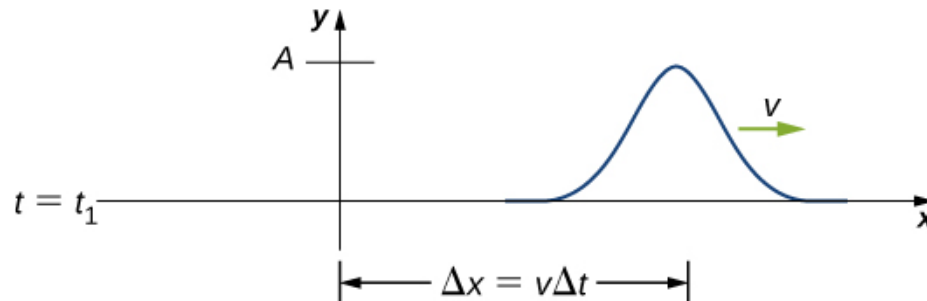
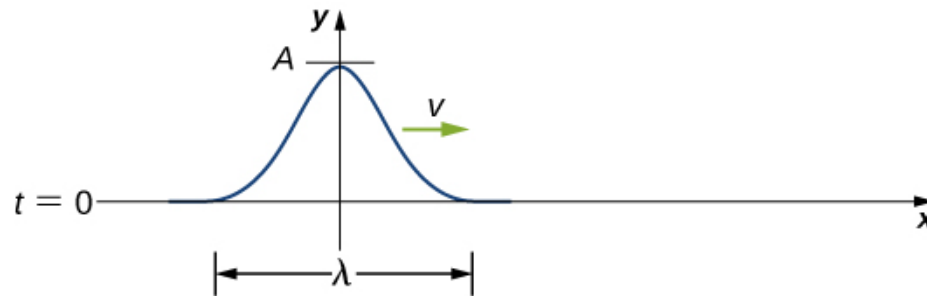


Fale mechaniczne

- Fale mogą być poprzeczne, podłużne lub stanowić kombinację obu tych typów.
- Przykładami fal poprzecznych są fale powstające na strunach instrumentów muzycznych lub na powierzchni wody.
- Fale dźwiękowe rozchodzące się w powietrzu lub wodzie są falami podłużnymi. W ich przypadku zaburzenia ośrodka to okresowe zmiany ciśnienia, które rozchodzą się w płynie.
- Dźwięki rozchodzące się w ciałach stałych mogą mieć zarówno składową podłużną, jak i poprzeczną.
- Trzęsienia Ziemi generują fale sejsmiczne, które również mają te dwie składowe.
- Również fale oceaniczne mają składowe podłużne i poprzeczne.

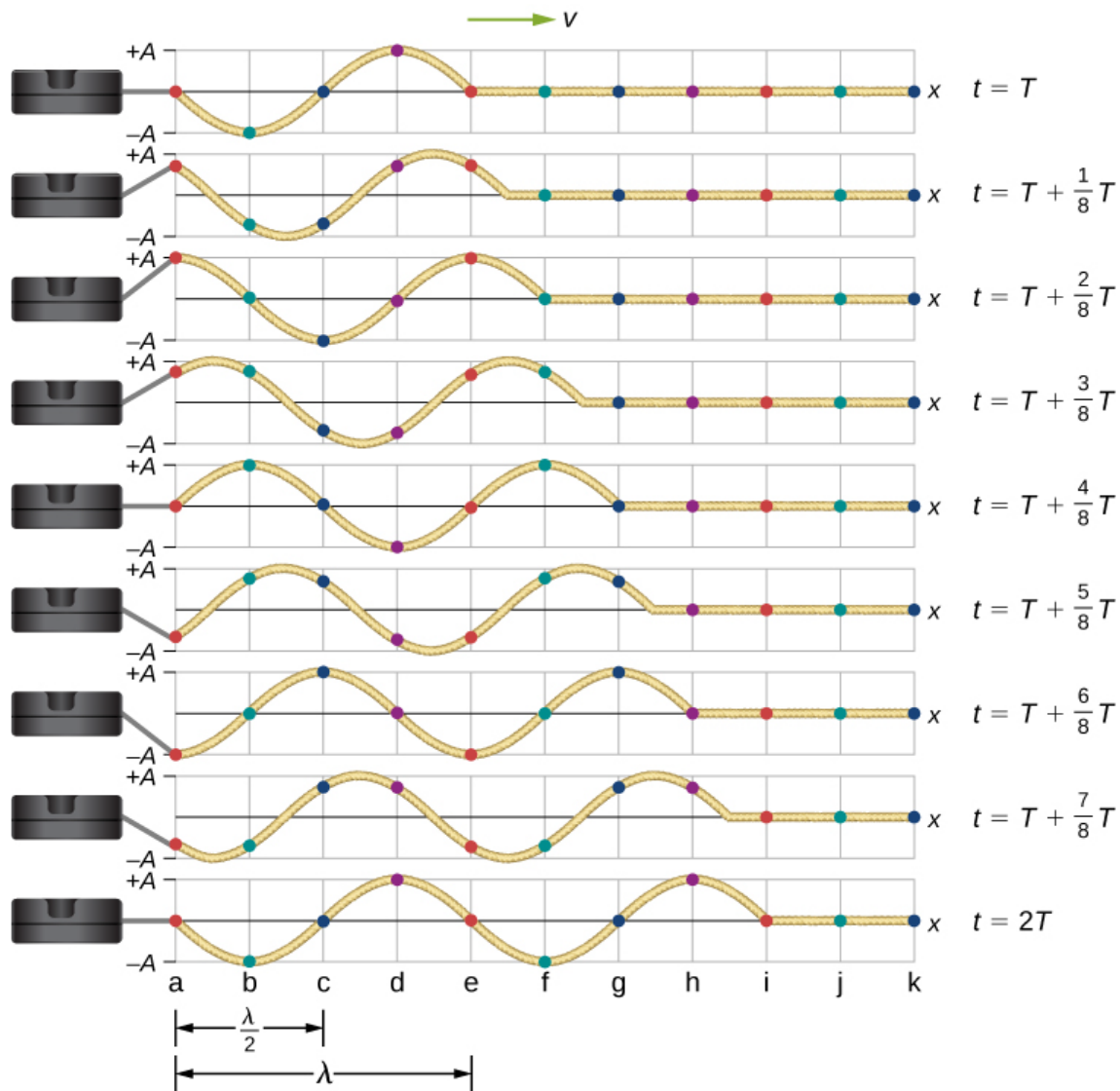
Matematyczny opis fal

- **Impuls** (ang. *pulse*) oznacza falę wytworzoną przez pojedyncze zaburzenie ośrodka.
- Impuls ma stałą amplitudę i rozchodzi się ze stałą prędkością.



Matematyczny opis fal

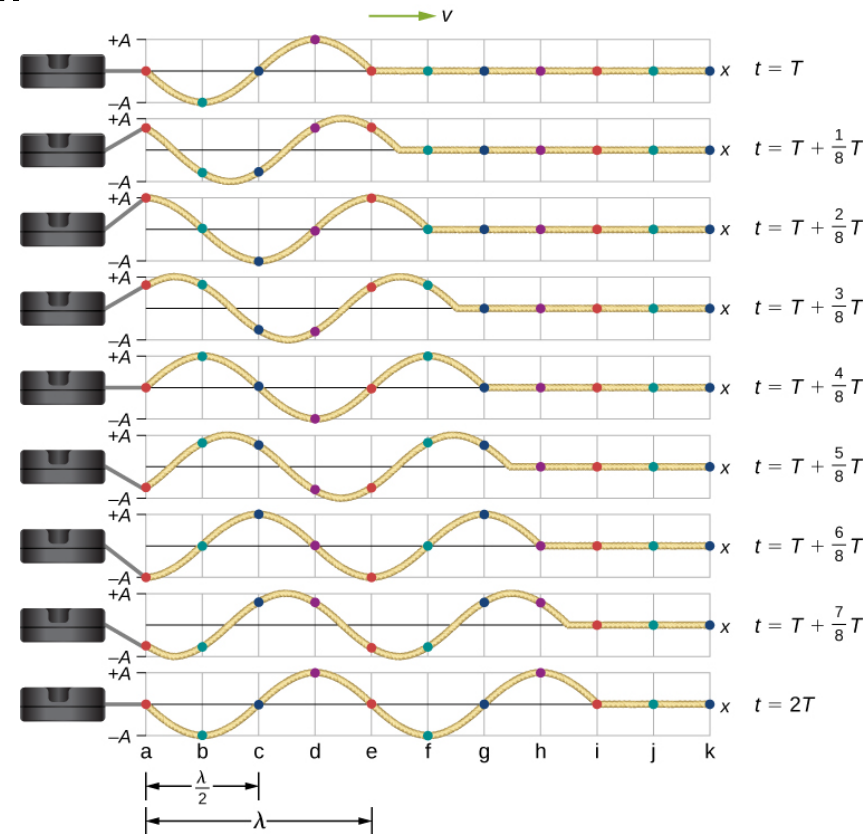
Sinusoidalna fala jednowymiarowa



Matematyczny opis fal

Sinusoidalna fala jednowymiarowa

- Każdy zaznaczony na kolorowo punkt struny wykonuje proste drgania harmoniczne w górę i w dół w zakresie pomiędzy $-A$ i A a natomiast okres wynosi T .
- Fala biegnąca wzdłuż struny jest sinusoidalna i przemieszcza się w prawo wraz z upływem czasu.



Matematyczny opis fal

Sinusoidalna fala jednowymiarowa

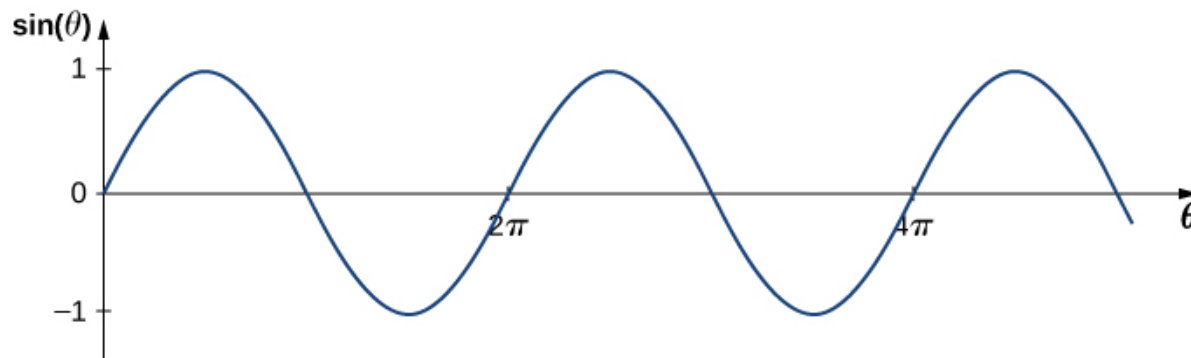
- rozważmy stosunek kąta do położenia

$$\frac{\theta}{x} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$y(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

- fala przemieszcza się wzdłuż struny w kierunku osi x ze stałą prędkością v ,
- funkcję falową definiuje się jako:

$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right)$$



Matematyczny opis fal

Sinusoidalna fala jednowymiarowa

$$y(x, t) = A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right)$$

$$y(x, t) = A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{\lambda} vt \right)$$

- $k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$ jest tzw. liczbą falową (ang. *wave number*)

$$\frac{2\pi}{\lambda} vt = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{T} \right) t = \frac{2\pi}{T} t = \omega t$$

- funkcja falowa dla prostej fali harmoniczej na strunie uprości się do:

$$y(x, t) = A \sin(kx \mp \omega t)$$

- znak (-) oznacza falę biegnącą w kierunku zgodnym ze zwrotem osi x , a znak (+) falę biegnącą przeciwnie do zwrotu osi x .

Matematyczny opis fal

Sinusoidalna fala jednowymiarowa

- prędkość fali wynosi:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{T} \left(\frac{2\pi}{2\pi} \right) = \frac{\omega}{k}$$

- gdy uwzględnić sytuację, gdy początkowe położenie jest inne niż 0, a początkowa prędkość jest inna niż $v = 0$, należy uwzględnić przesunięcie fazowe ϕ

$$y(x, t) = A \sin(kx \mp \omega t + \phi)$$

Matematyczny opis fal

Sinusoidalna fala jednowymiarowa - przykład

Fala poprzeczna biegnąca wzdłuż struny ma postać:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) = 0,2 \text{ m} \cdot \sin(6,28 \text{ m}^{-1} \cdot x - 1,57 \text{ s}^{-1} \cdot t)$$

Oblicz amplitudę, długość fali, okres i prędkość fali.

Matematyczny opis fal

Sinusoidalna fala jednowymiarowa

- Prędkość fali jest stała i oddaje prędkość fali rozchodzącej się w ośrodku, a nie prędkość cząsteczek, które go tworzą.
- Drobiny wykonują drgania wokół położenia równowagi wtedy, gdy fala rozchodzi się w ośrodku.
- W przypadku fali poprzecznej, która rozchodzi się w kierunku zgodnym ze zwrotem osi x , cząstki wykonują drgania w górę i w dół, wzdłuż osi y , w kierunku prostopadłym do ruchu fali.
- Prędkość cząsteczek ośrodka nie jest stała, co oznacza występowanie przyspieszenia.

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$\begin{aligned} v_y(x, t) &= \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (A \sin(kx - \omega t + \phi)) \\ &= -A\omega \cos(kx - \omega t + \phi) \\ &= -v_{y \max} \cos(kx - \omega t + \phi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_y(x, t) &= \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (-A\omega \cos(kx - \omega t + \phi)) \\ &= -A\omega^2 \sin(kx - \omega t + \phi) \\ &= -a_{y \max} \sin(kx - \omega t + \phi). \end{aligned}$$

Matematyczny opis fal

Równanie falowe

- Pierwsza pochodna cząstkowa opisuje nachylenie fali w punkcie x , w chwili t

$$\text{nachylenie} = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (A \sin(kx - \omega t + \phi)) = Ak \cos(kx - \omega t + \phi)$$

- Druga pochodna cząstkowa informuje nas, jak nachylenie fali zmienia się w zależności od położenia - krzywizna fali

$$\text{krzywizna} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (A \sin(kx - \omega t + \phi)) = -Ak^2 \sin(kx - \omega t + \phi)$$

- Stosunek przyspieszenia i krzywizny prowadzi do zależności nazywanej **liniowym równaniem falowym** (równanie drgającej struny).

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

- Określenie „liniowe równanie falowe” związane jest z liniowym charakterem sił sprężystości działających w ośrodku.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}} &= \frac{-A\omega^2 \sin(kx - \omega t + \phi)}{-Ak^2 \sin(kx - \omega t + \phi)} \\ &= \frac{\omega^2}{k^2} = v^2, \end{aligned}$$

Matematyczny opis fal

Równanie falowe - własności

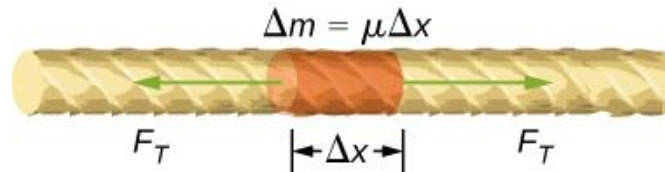
- Jeśli dwie funkcje falowe są rozwiązaniami liniowego równania falowego, wówczas suma obu tych funkcji jest również rozwiązaniem równania falowego.
- Jeśli dwie liniowe funkcje falowe dodamy algebraicznie, wtedy wypadkowa funkcja falowa też będzie spełniać liniowe równanie falowe.
- Wychylenie ośrodka w każdym punkcie jest algebraiczną sumą wychyleń spowodowanych przez każdą falę z osobna.
- Ta własność jest znana jako zasada superpozycji.

Prędkość rozchodzenia się fali

Prędkość fali na naprężonej strunie

W jaki sposób prędkość fali na strunie zależy od jej naprężenia i liniowej gęstości?

- Kiedy struna znajduje się w położeniu równowagi, naprężenie struny jest stałe.



- Odcinek ten znajduje się w położeniu równowagi - naprężenia działające na każdy z jego końców odcinka są równe co do wartości, ale mają przeciwne zwroty.

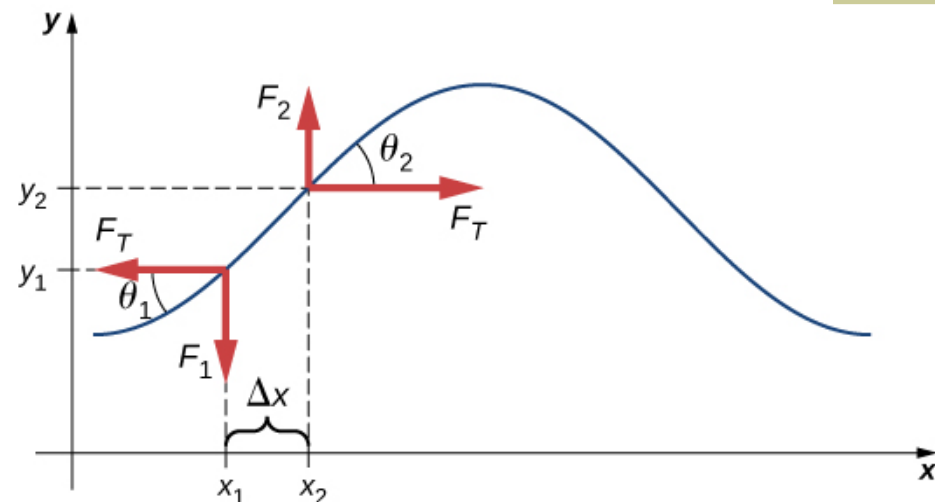
$$\mu = \frac{\text{masa struny}}{\text{długość struny}} = \frac{m}{l}$$

Prędkość rozchodzenia się fali

Prędkość fali na naprężonej strunie

W jaki sposób prędkość fali na strunie zależy od jej naprężenia i liniowej gęstości?

- Jeśli szarpniemy naciągniętą strunę, wzdłuż niej powstanie fala poprzeczna, która będzie się rozchodzić w kierunku zgodnym ze zwrotem osi x .
- Odcinek wykonuje drgania w płaszczyźnie prostopadłej do ruchu fali pod wpływem działania siły sprężystości, ale nie przemieszcza się wzdłuż osi x .
- Naprężenia są przyłożone do obu końców odcinka i skierowane wzdłuż osi x . Siły te są stałe i niezależne od położenia oraz czasu.



Prędkość rozchodzenia się fali

Prędkość fali na naprężonej strunie

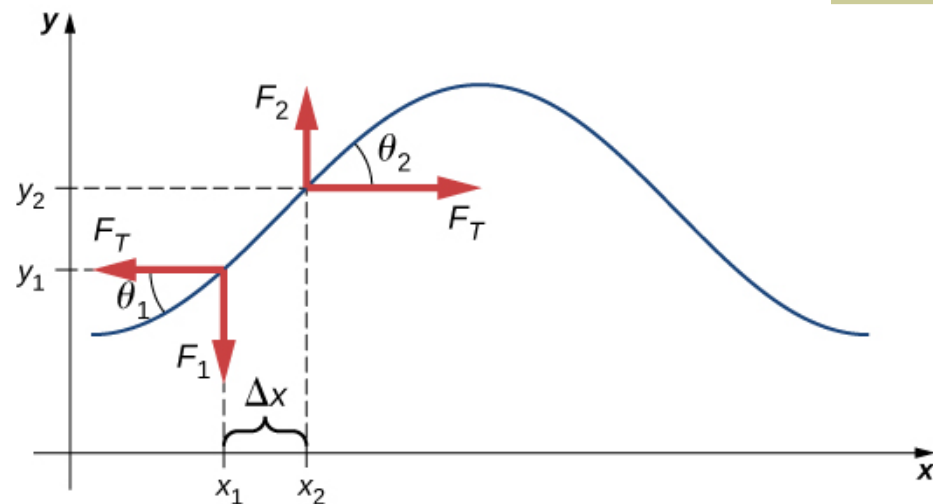
W jaki sposób prędkość fali na strunie zależy od jej naprężenia i liniowej gęstości?

- Siła wypadkowa działająca na rozważany odcinek jest skierowana wzdłuż struny i stanowi sumę jej naprężenia oraz siły sprężystości.
- Tangens kąta θ jest równy nachyleniu funkcji w danym punkcie, czyli

$$F_{\text{wypadkowa}} = F_1 + F_2 = F_T \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x_2} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x_1} \right] = \Delta m a = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- Po przyjęciu, że $\Delta x \rightarrow 0$ i skorzystaniu z równania falowego mamy:

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\mu}{F_T}$$
$$|v| = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$



Prędkość rozchodzenia się fali

Prędkość fal w cieczech

- Prędkość fali w ośrodku zależy od własności sprężystych ośrodka i jego bezwładności:

$$|v| = \sqrt{\frac{\text{sprężystość}}{\text{bezwładność}}}$$

- Sprężystość ośrodka oznacza zdolność jego cząsteczek do osiągnięcia stanu równowagi po zaburzeniu.
- Bezwładność oznacza opór, jaki cząsteczki stawiają wobec zmian prędkości.
- Prędkość fali podłużnej w płynie zależy od jego gęstości i modułu sprężystości objętościowej (moduł Helmholtza):

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

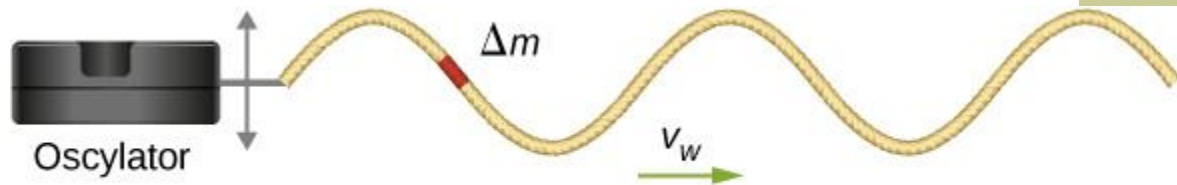
- Prędkość dźwięku w powietrzu przy ciśnieniu atmosferycznym oraz w temperaturze 20 st. C wynosi 343 m/s.
- Ponieważ gęstość zależy od temperatury, prędkość dźwięku w powietrzu zależy od temperatury powietrza.

Energia i moc fal

- Wszystkie fale przenoszą energię, co czasami możemy zaobserwować bezpośrednio:
 - trzęsienia ziemi są w stanie doszczętnie zniszczyć całe miasta,
 - hałas może uszkodzić komórki nerwowe narządu słuchu,
 - ultradźwięki pomocne są w leczeniu nadwerężonych mięśni.
- Energia fali zależy od jej amplitudy i częstotliwości.
- Fala o wysokiej częstotliwości może dostarczyć więcej energii w jednostce czasu niż fala o niskiej częstotliwości.
- Średnie tempo transportu energii przez falę mechaniczną jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy oraz kwadratu częstotliwości.

Energia i moc fal

- Rozważmy sinusoidalną falę na drgającej strunie
- Energia wytwarzana w oscylatorze rozchodzi się wzdłuż struny.
- Rozważmy element struny o masie Δm .
- Ponieważ energia rozchodzi się wzdłuż struny, to każdy jej element drga z tą samą częstotliwością, z jaką rozchodzi się fala.
- Każdy element struny może być opisany za pomocą modelu prostego oscylatora harmonicznego.
- Ponieważ struna ma stałą gęstość liniową każdy odcinek struny ma masę $\Delta m = \mu \Delta x$.
- Całkowita energia mechaniczna fali to suma energii kinetycznej i potencjalnej.



Energia i moc fal

- Energia kinetyczna odcinka o długości Δx

$$\Delta K = \frac{1}{2}(\mu \Delta x) v_y^2$$

- przyjmując, że długość odcinka struny dąży do zera

$$dK = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{2}(\mu \Delta x) v_y^2 = \frac{1}{2}(\mu dx) v_y^2$$

$$dK = \frac{1}{2}(\mu dx)(-A\omega \cos(kx - \omega t))^2$$

- Fala może mieć długość równą wielokrotności długości fali. Aby dokonać normalizacji energii, rozważmy energię kinetyczną przypadającą na jednostkę długości fali.

$$K = \int_0^\lambda dK = \int_0^\lambda \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 \cos^2(kx) dx = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 \int_0^\lambda \cos^2(kx) dx$$

$$K_\lambda = \frac{1}{4} \mu A^2 \omega^2 \lambda$$

Energia i moc fal

- Energię potencjalną dla takiego odcinka możemy wyliczyć, jeśli znamy stałą sprężystości

$$\Delta U = \frac{1}{2} k_s x^2 = \frac{1}{2} \Delta m \omega^2 x^2$$

$$dU = \frac{1}{2} k_s x^2 = \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2 dx$$

$$U_\lambda = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \int_0^\lambda \cos^2(kx) dx = \frac{1}{4} \mu A^2 \omega^2 \lambda$$

- Energia potencjalna przypadająca na jednostkę długości fali równa się energii kinetycznej przypadającej na jednostkę długości fali.
- Całkowita energia przypadająca na jednostkę długości fali to suma energii potencjalnej i kinetycznej:

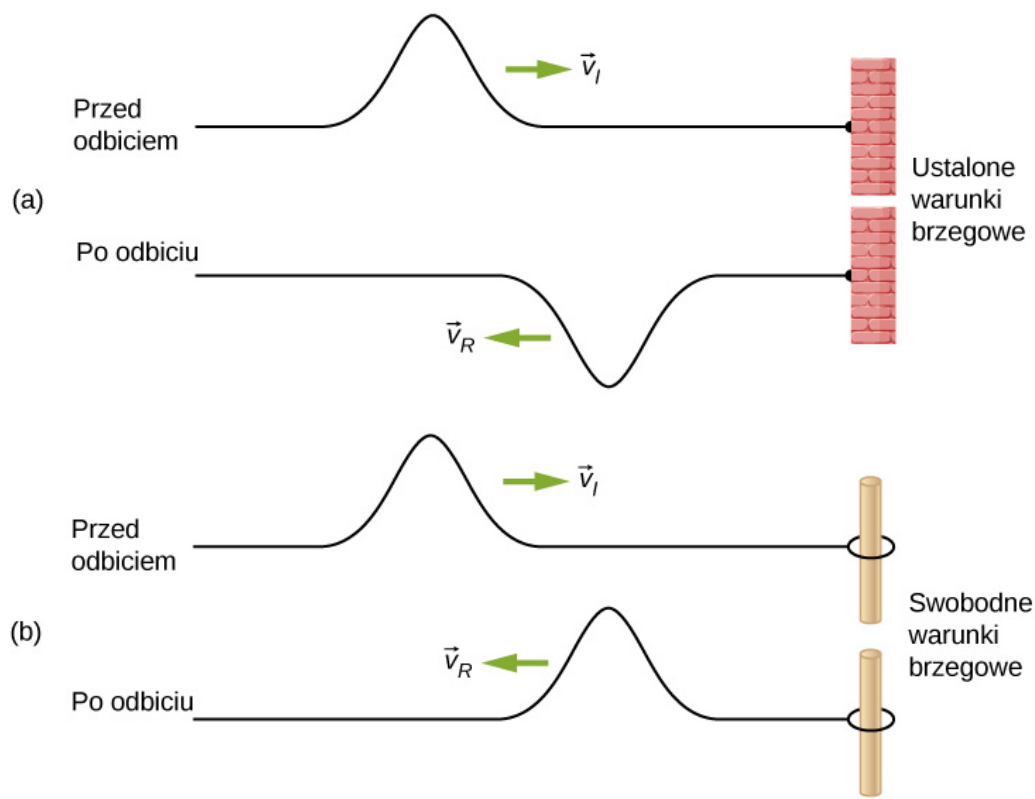
$$E_\lambda = \frac{1}{4} \mu A^2 \omega^2 \lambda + \frac{1}{4} \mu A^2 \omega^2 \lambda = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 \lambda$$

- Dla fali sinusoidalnej uśredniona w czasie moc to energia podzielona przez okres:

$$P_{\text{średnie}} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 v$$

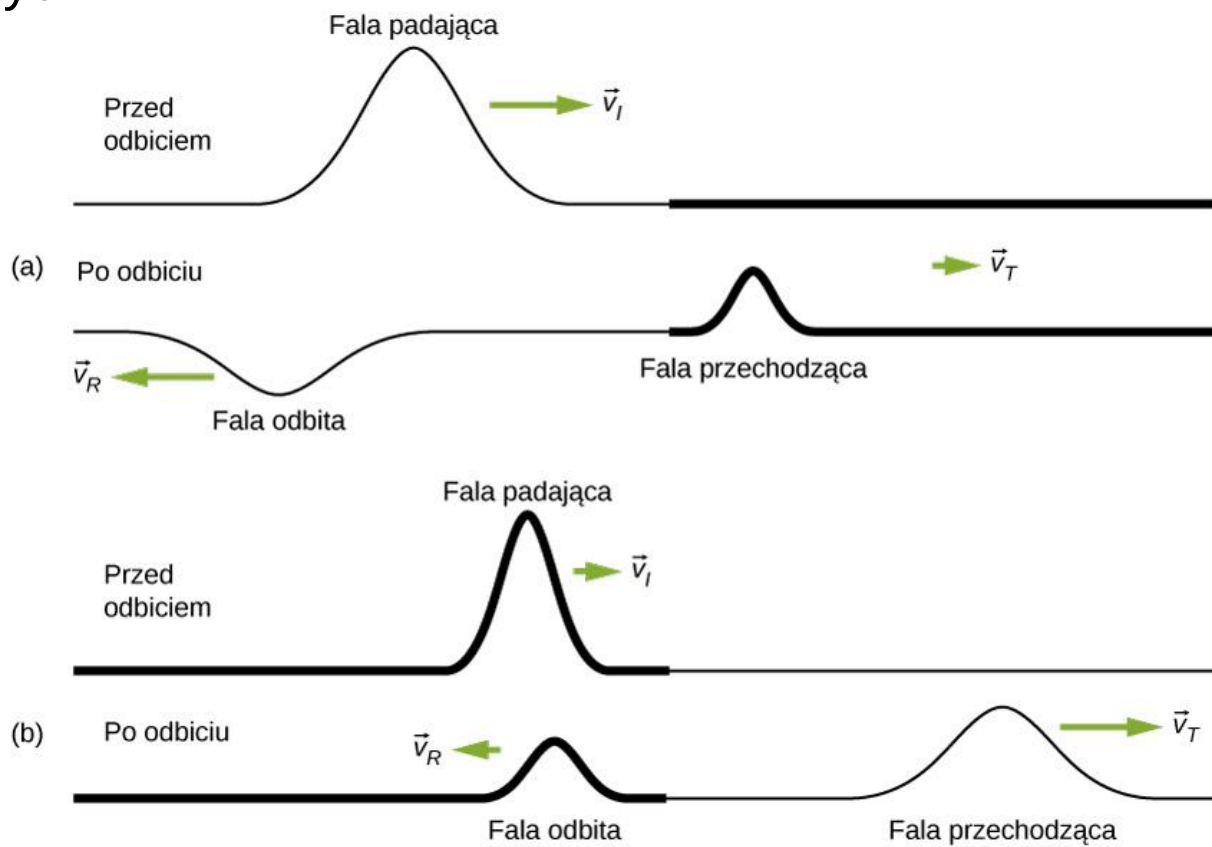
Interferencja fal

- Fala rozchodząc się w ośrodku i napotyka jego granicę, ulega odbiciu (całkowitemu lub częściowemu).
- Fala, która biegnie w kierunku granicy ośrodka, to fala padająca, natomiast fala, która odbiła się od granicy, to fala odbita.
- Sposób, w jaki odbija się od granicy ośrodka, zależy od warunków brzegowych.



Interferencja fal

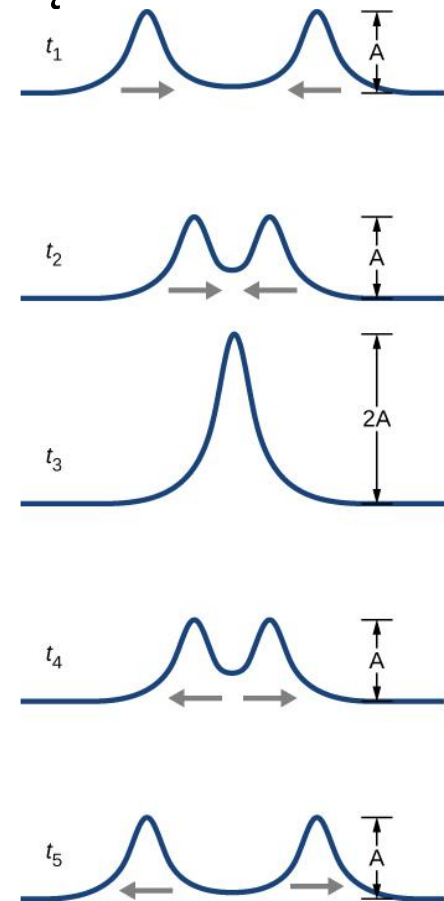
- Fala rozchodząc się w ośrodku i napotyka jego granicę, ulega odbiciu (całkowitemu lub częściowemu).
- Fala, która biegnie w kierunku granicy ośrodka, to fala padająca, natomiast fala, która odbiła się od granicy, to fala odbita.
- Sposób, w jaki odbija się od granicy ośrodka, zależy od warunków brzegowych.



Interferencja fal

Superpozycja i interferencja

- Rozważmy dwa impulsy o takiej samej amplitudzie, które biegną naprzeciwko siebie w tym samym ośrodku.
- W efekcie fale pokryją się, w wyniku czego powstanie fala o amplitudzie dwa razy większej, a następnie fale zaczną biec w przeciwnych kierunkach.
- Zjawisko to nazywa się interferencją



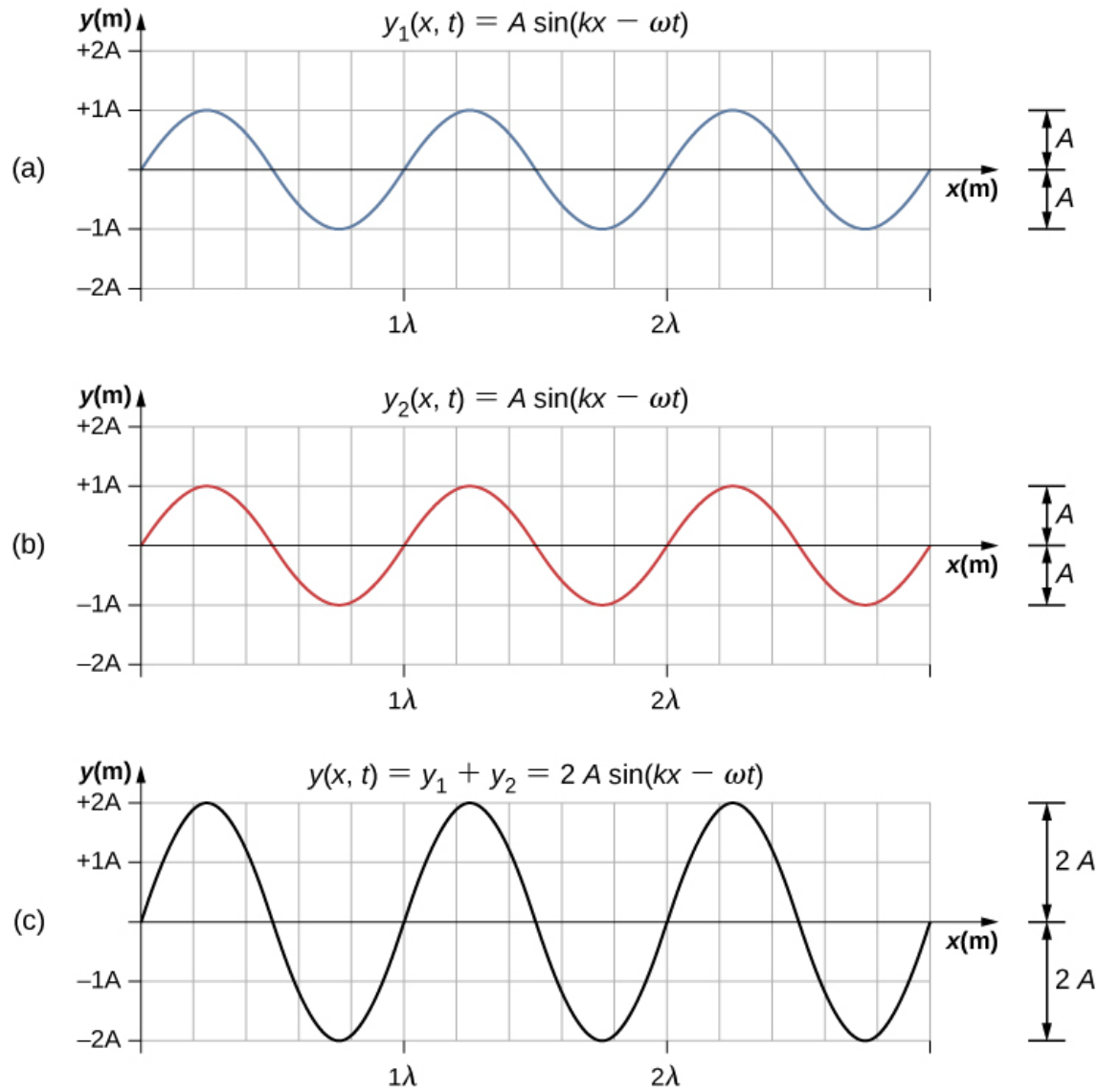
Interferencja fal

Superpozycja i interferencja

- Dla fal mechanicznych zasada superpozycji mówi, że jeśli co najmniej dwie fale biegnące nałożą się na siebie w tym samym punkcie, to wypadkowe położenie cząstki ośrodka w tym punkcie jest algebraiczną sumą położzeń tego punktu dla każdej fali z osobna.
- Ograniczymy się tylko do fal liniowych, w szczególności sinusoidalnych.
- Na fale mechaniczne, które spełniają zasadę superpozycji, zwykle narzucone jest ograniczenie, że amplitudy muszą być małe w stosunku do długości fali. Jeśli amplituda byłaby zbyt duża, to ośrodek uległby takiemu odkształceniu, że siła sprężystości przestałaby być liniowa.
- Fale mogą ulegać interferencji konstruktywnej lub destruktywnej.

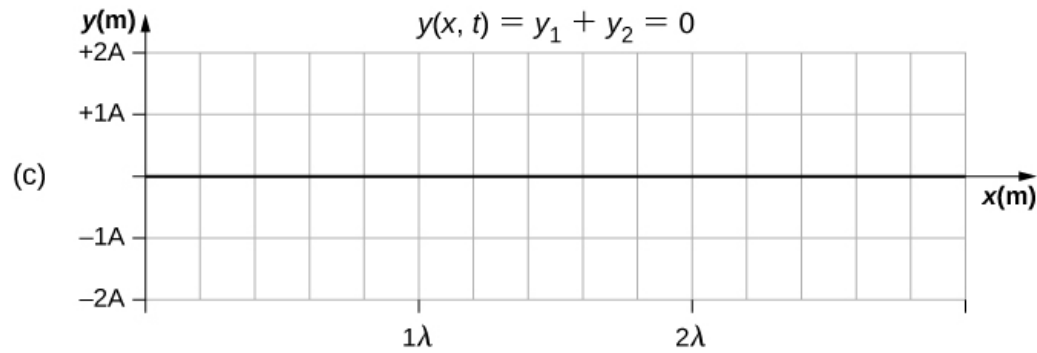
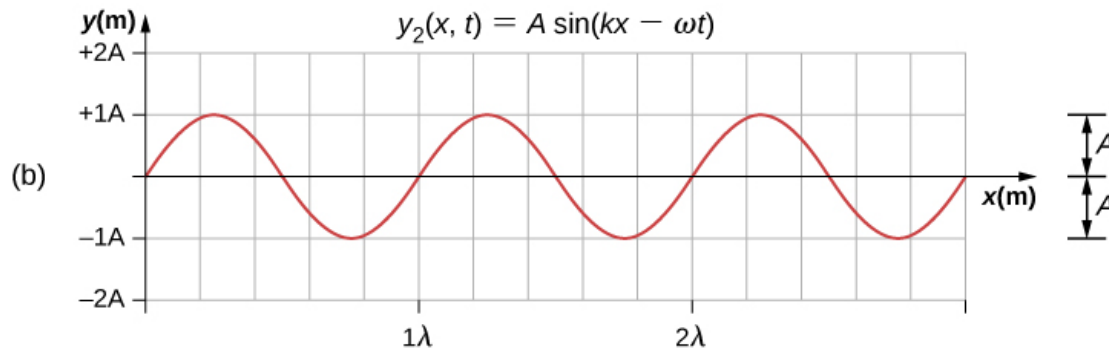
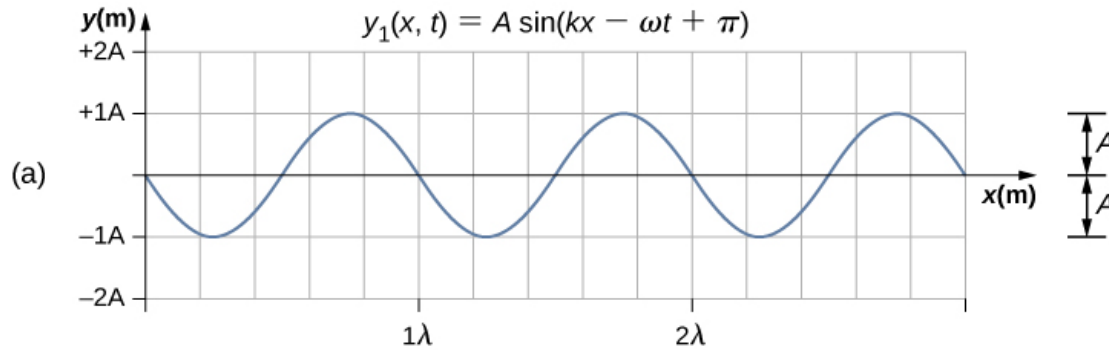
Interferencja fal

Superpozycja i interferencja



Interferencja fal

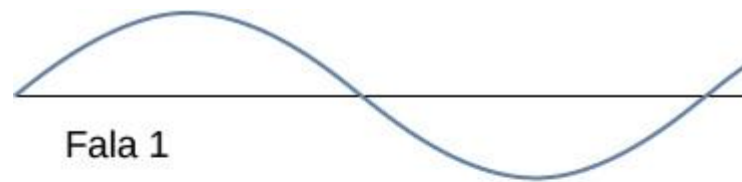
Superpozycja i interferencja



Interferencja fal

Superpozycja i interferencja

- Superpozycja większości fal prowadzi do powstania efektów, które są kombinacją interferencji konstruktywnej i destruktywnej, przy czym efekt zależy od miejsca i czasu obserwacji.



Interferencja fal

Superpozycja fal sinusoidalnych o różnych fazach

$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi),$$

$$y_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t).$$

$$y_R(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi) + A \sin(kx - \omega t)$$

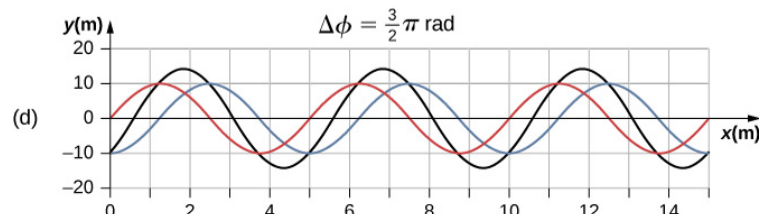
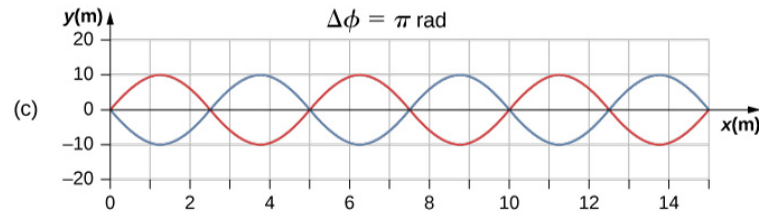
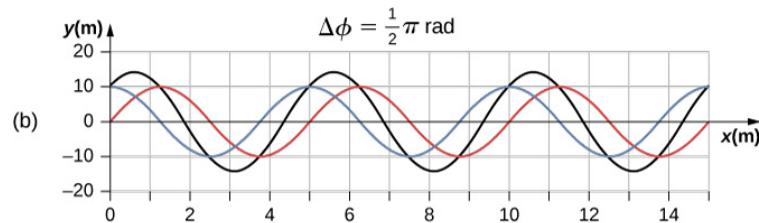
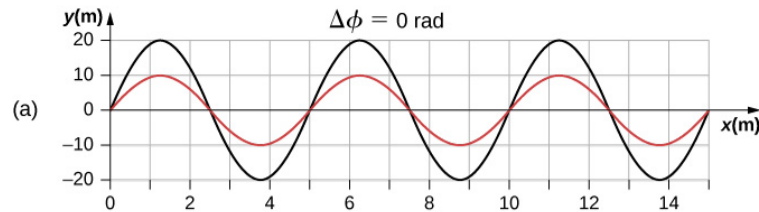
$$y_R(x, t) = \left[2A \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

$$\sin u + \sin v = 2 \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

Interferencja fal

Superpozycja fal sinusoidalnych o różnych fazach

$$y_R(x, t) = \left[2A \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$



Fale stojące i rezonans

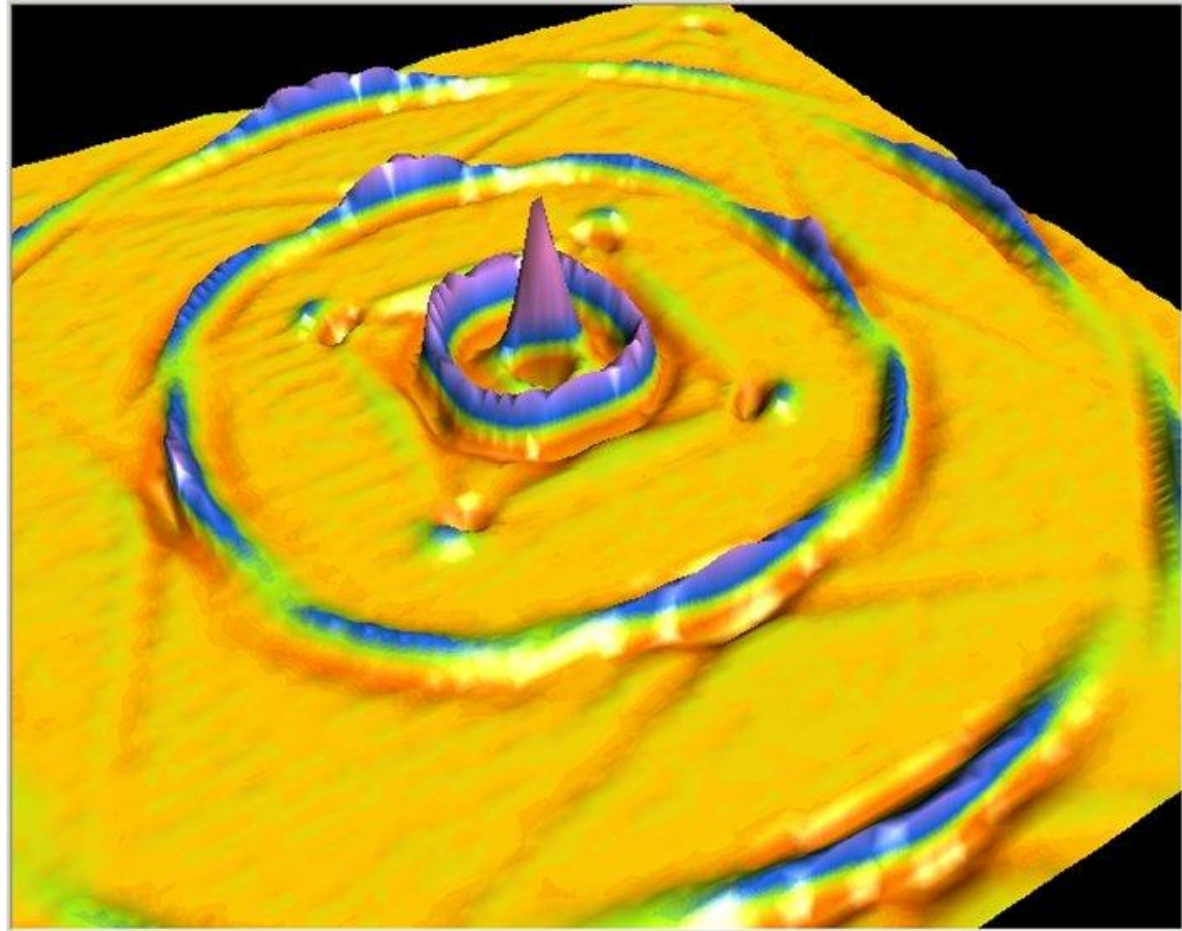
Fale stojące

- Czasami fale nie przemieszczają się.
- Drgania powodują powstanie kulistych fal stojących w mleku.
- Takie fale powstają w wyniku superpozycji dwóch lub więcej fal biegnących, które są identyczne, ale przemieszczają się w przeciwnych kierunkach.
- Fale te nakładają się na siebie, a zaburzenia się dodają.
- Jeśli mają one takie same amplitudy i długości, możemy zaobserwować naprzemiennie występujące efekty wzmacniania i osłabiania interferencyjnego.
- Fala wypadkowa wygląda tak, jakby stała w miejscu, stąd nazwa fala stojąca.



Fale stojące i rezonans

Fale stojące



Powierzchniowe fale akustyczne na kryształach tlenku telluru (001) pokrytym warstwą złota o grubości 40 nm. (Applied Solid State Physics Laboratory, Division of Applied Physics, Graduate School of Engineering, Hokkaido University, Sapporo, Japan) - Wikipedia

Fale stojące i rezonans

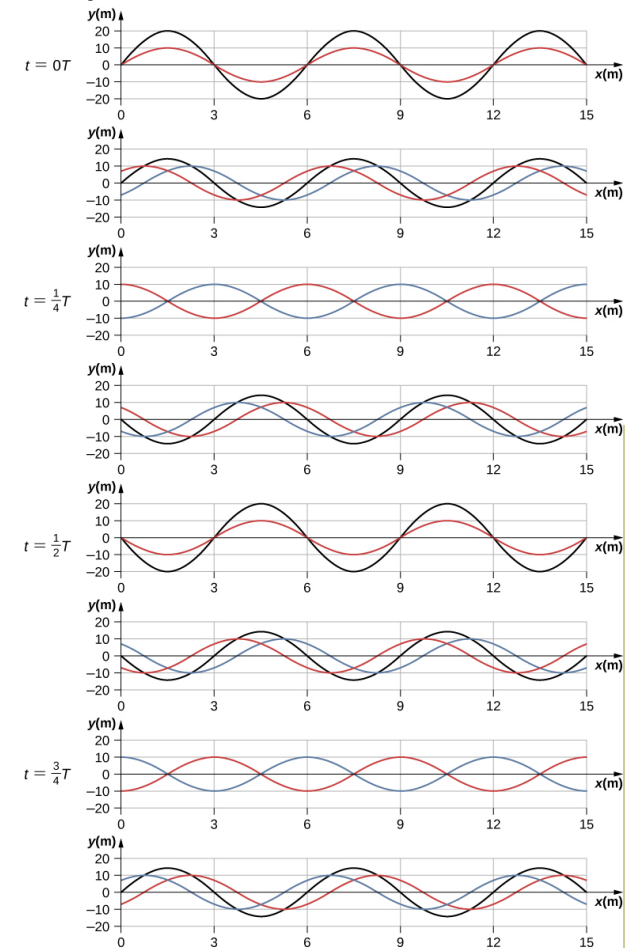
Fale stojące

- Rozważmy dwie identyczne fale, które biegną w przeciwnych kierunkach.
- Fale interferują ze sobą, tworząc falę wypadkową:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t),$$

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t)$$

$$y(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$$



$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

Fale stojące i rezonans

Fale stojące

- Fale mają zgodne fazy w chwilach równych każdej całkowitej wielokrotności połowy okresu:

$$t = n \frac{T}{2}, \quad \text{gdzie } n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

- Fale mają przeciwne fazy, gdy

$$t = \frac{1}{4}T, \frac{3}{4}T, \frac{5}{4}T, \dots, \frac{n}{4}T, \quad \text{gdzie } n = 1, 3, 5, \dots$$

- w niektórych punktach fali wypadkowej wychylenie jest równe zero – węzły

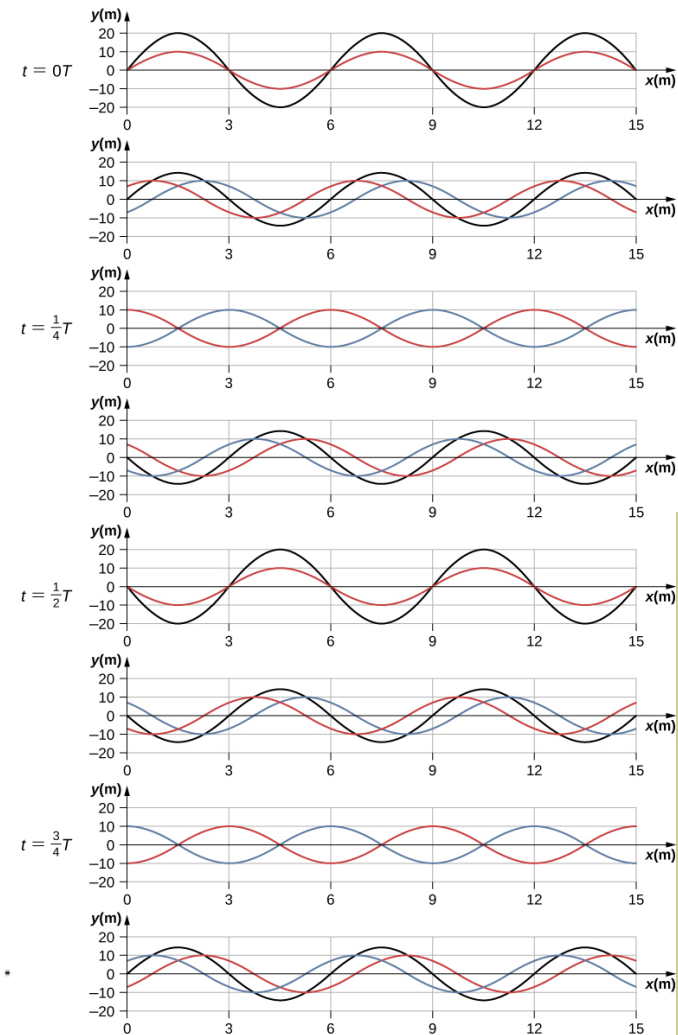
$$\sin(kx) = 0$$

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots = \frac{n\lambda}{2}, \quad \text{gdzie } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- punkty, w których y przyjmuje wartości A lub $-A$ - strzałki

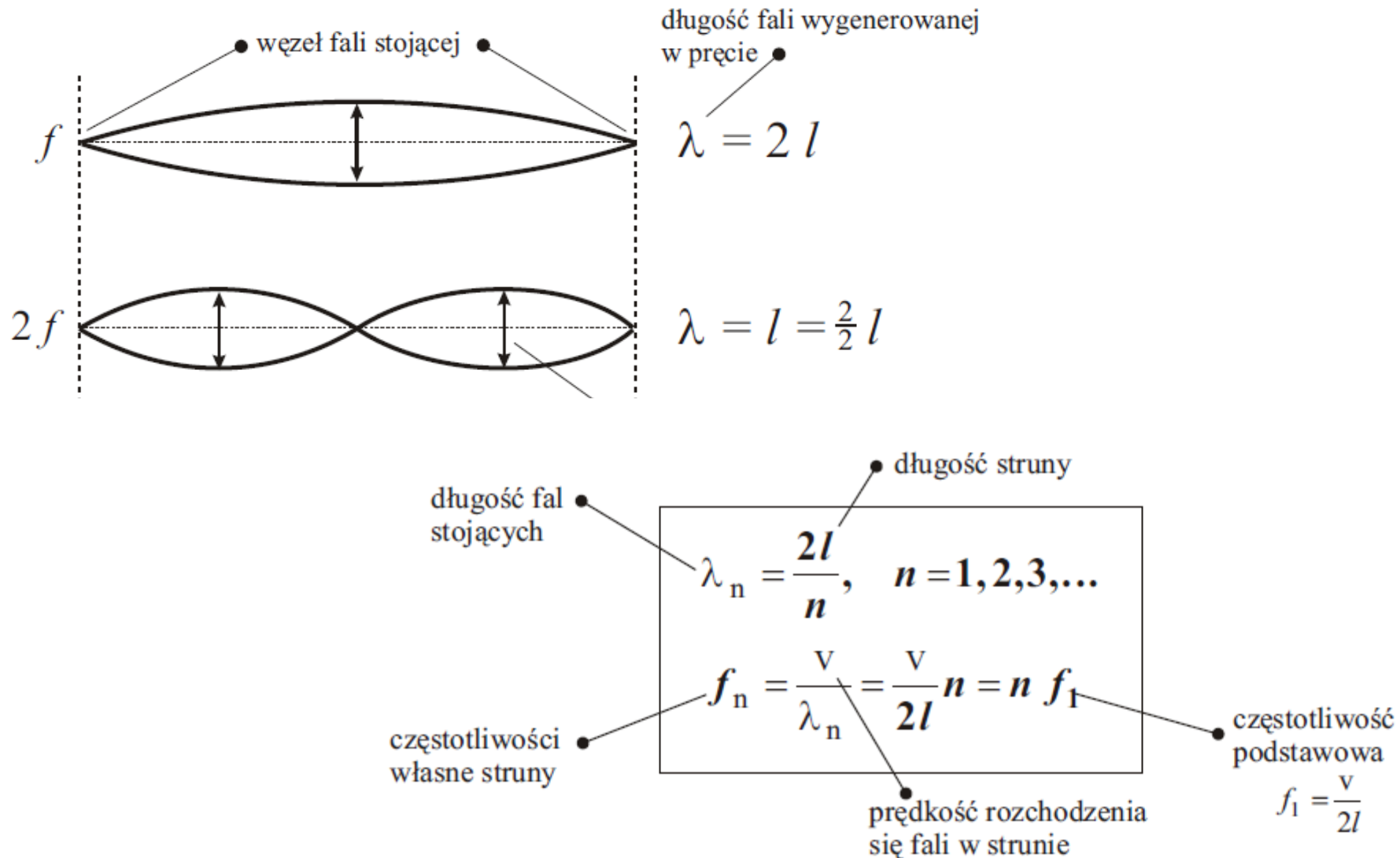
$$\sin(kx) = \pm 1 \quad x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots = \frac{n\lambda}{4}, \quad \text{gdzie } n = 1, 3, 5, \dots$$

$$y(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$$



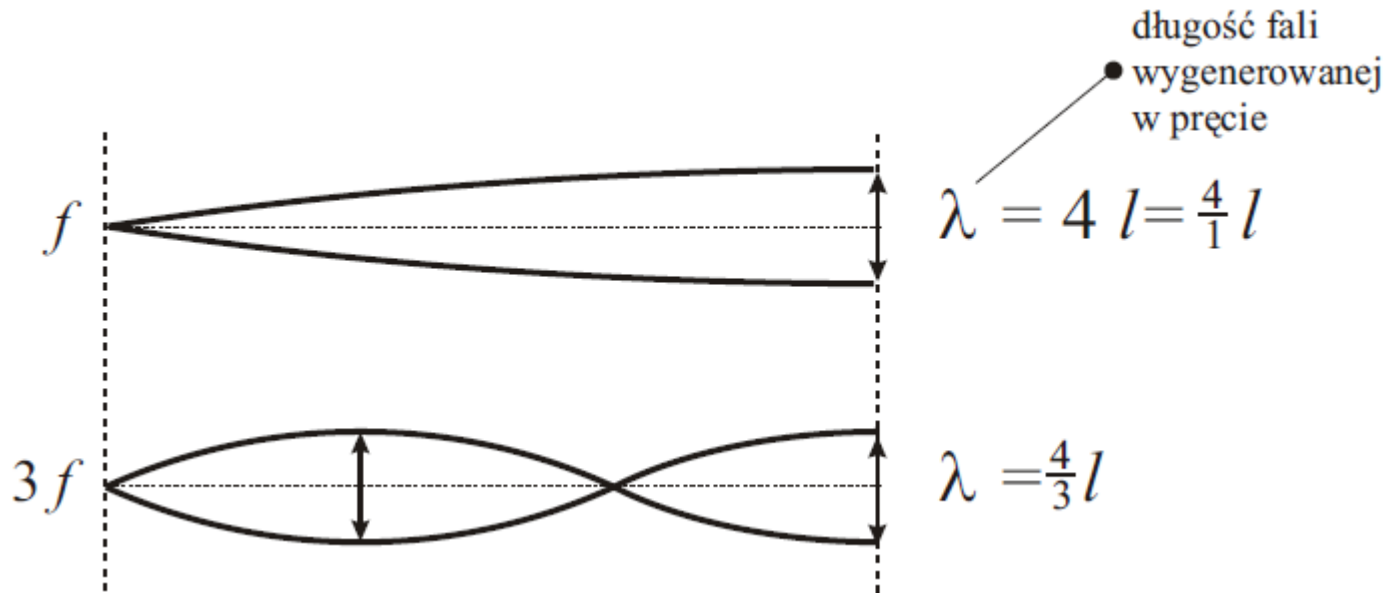
Fale stojące

Np. pręt lub struna zamocowane na obu końcach



Fale stojące

Np. pręt lub struna zamocowane na jednym końcu



$$\lambda_n = \frac{4l}{2n-1}, \quad f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{4l} (2n-1), \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Dziękuję za uwagę!